點　線　面

過定點之直線與曲線所圍面積極值探討

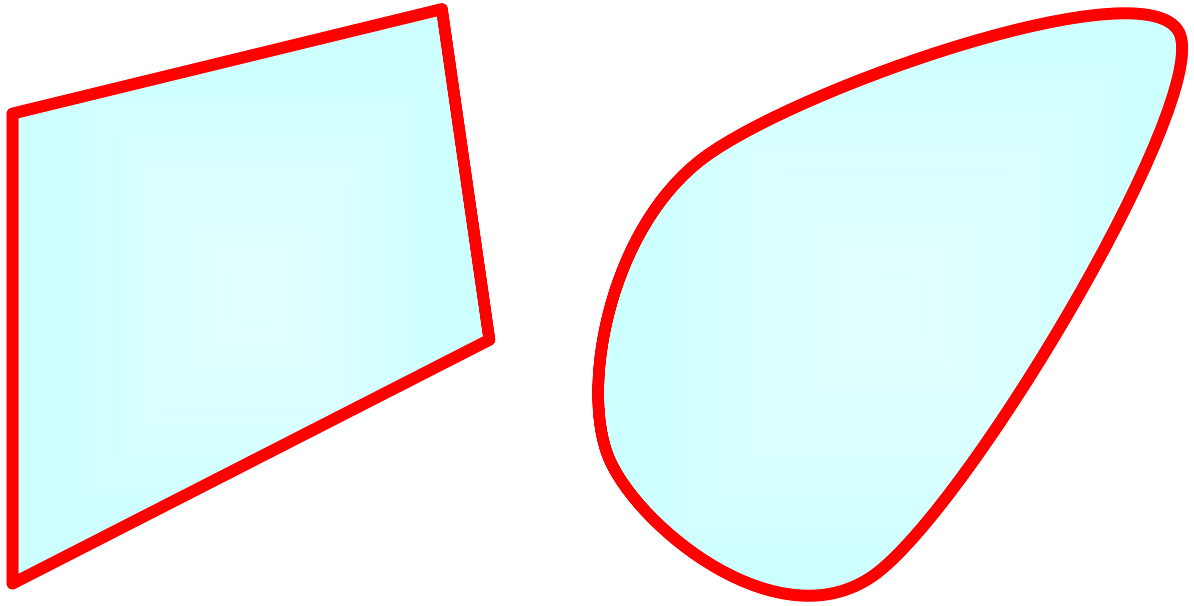
研究目的

1.等分截線的存在性及唯一性

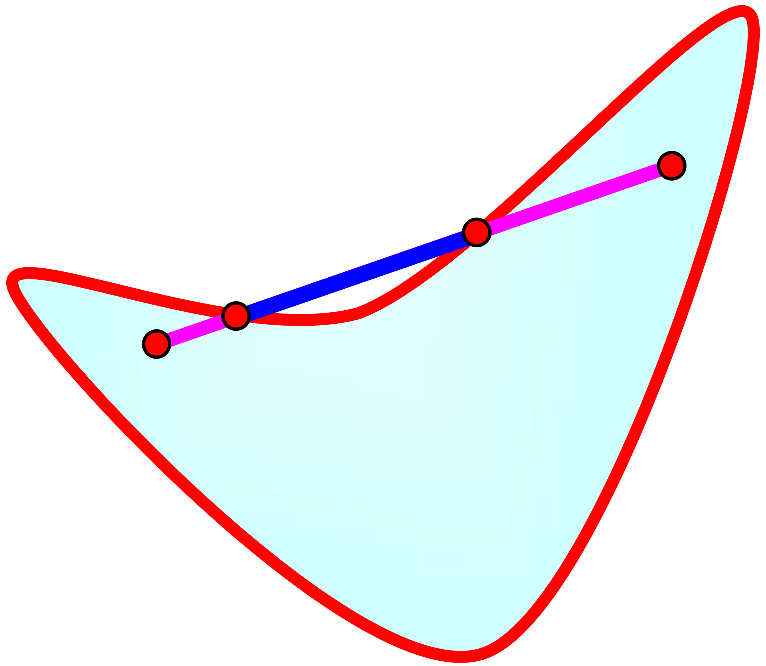
2.有效區域面積極值發生的充要條件

3.有效區域面積的變化

凸曲線：　某凸集合的邊界。

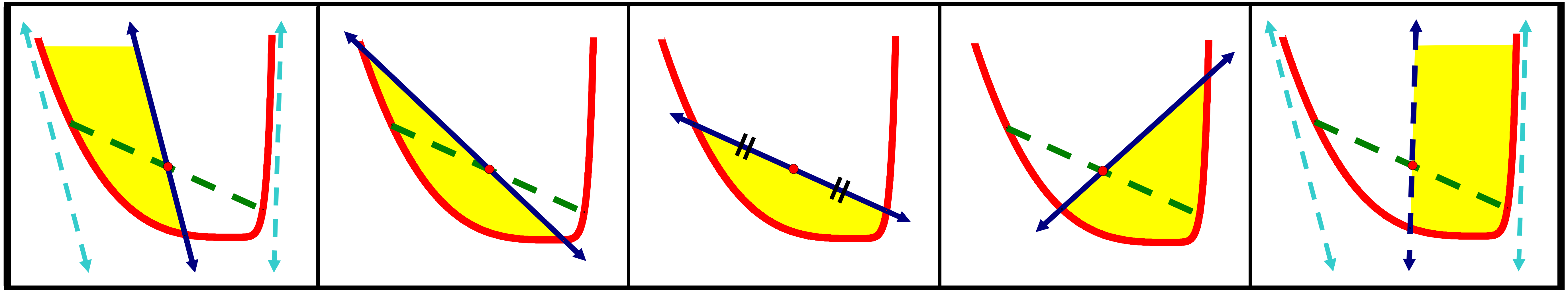


凸曲線



非凸曲線
(凹曲線)

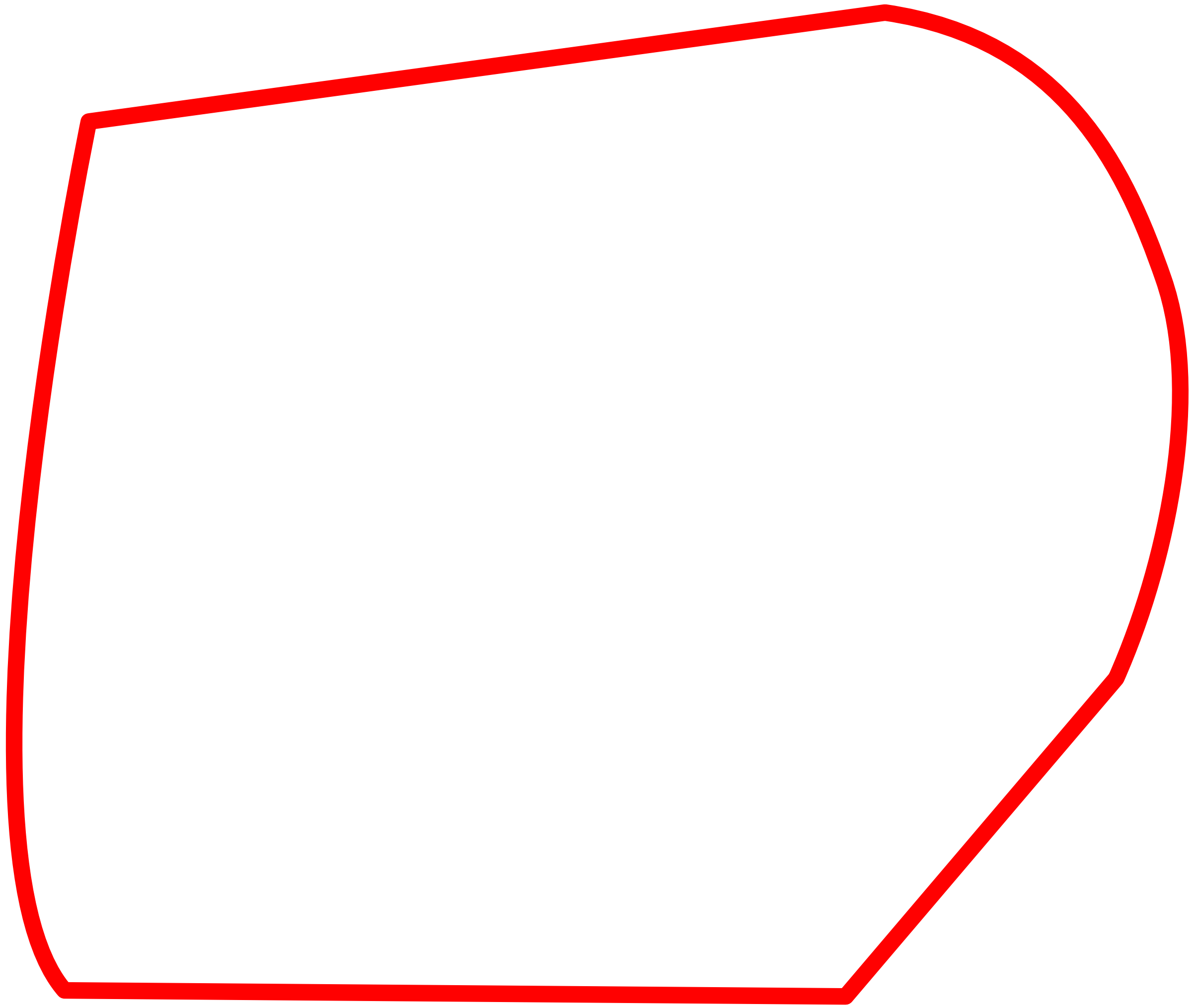
非封閉凸曲線



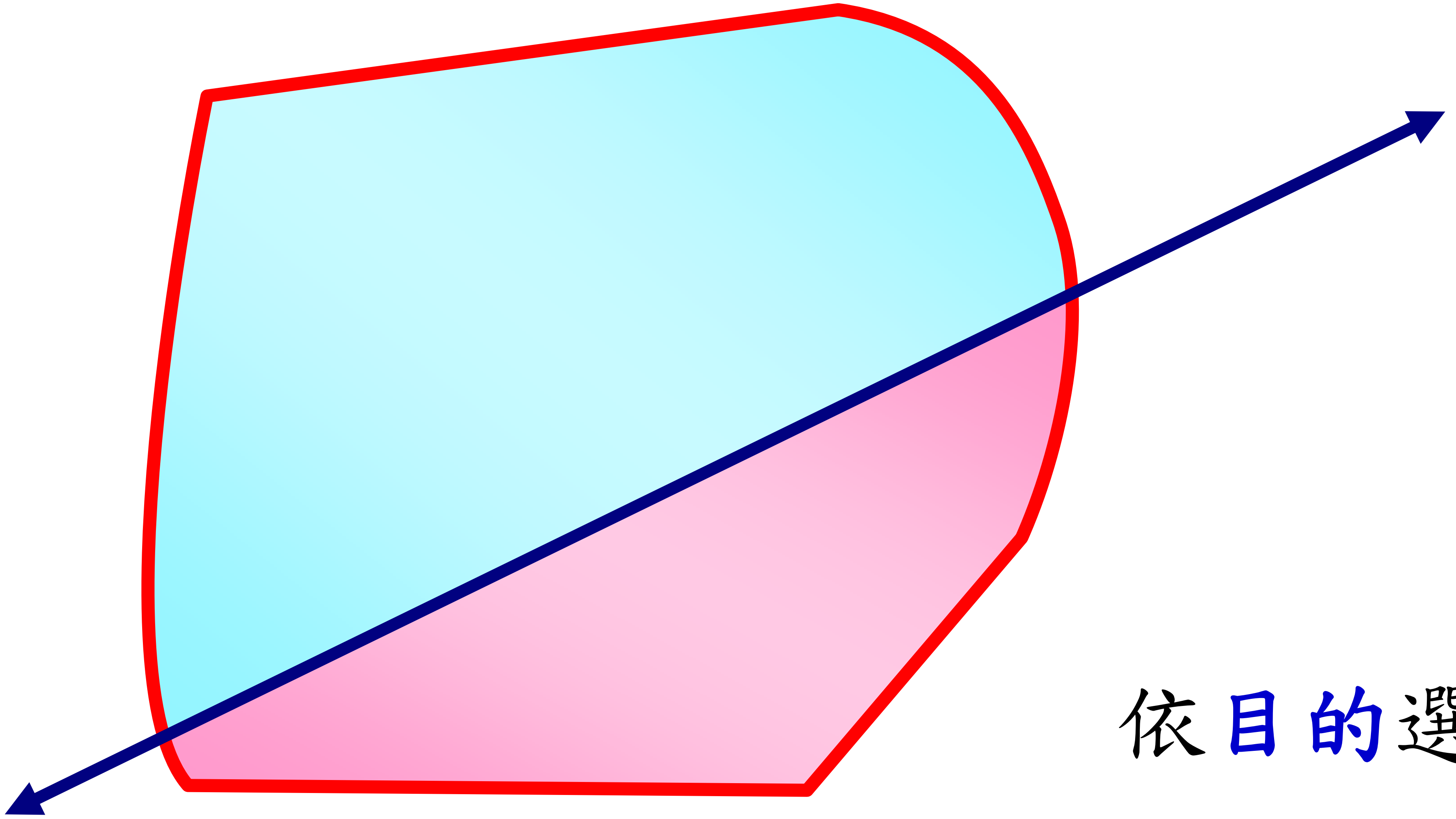
無窮大 ← 嚴格遞增 最小值 → 嚴格遞增 無窮大

$m \to \lim_{x \to -\infty} C'(x)$ 　　等分截線　　 $m \to \lim_{x \to +\infty} C'(x)$

有效區域的選取

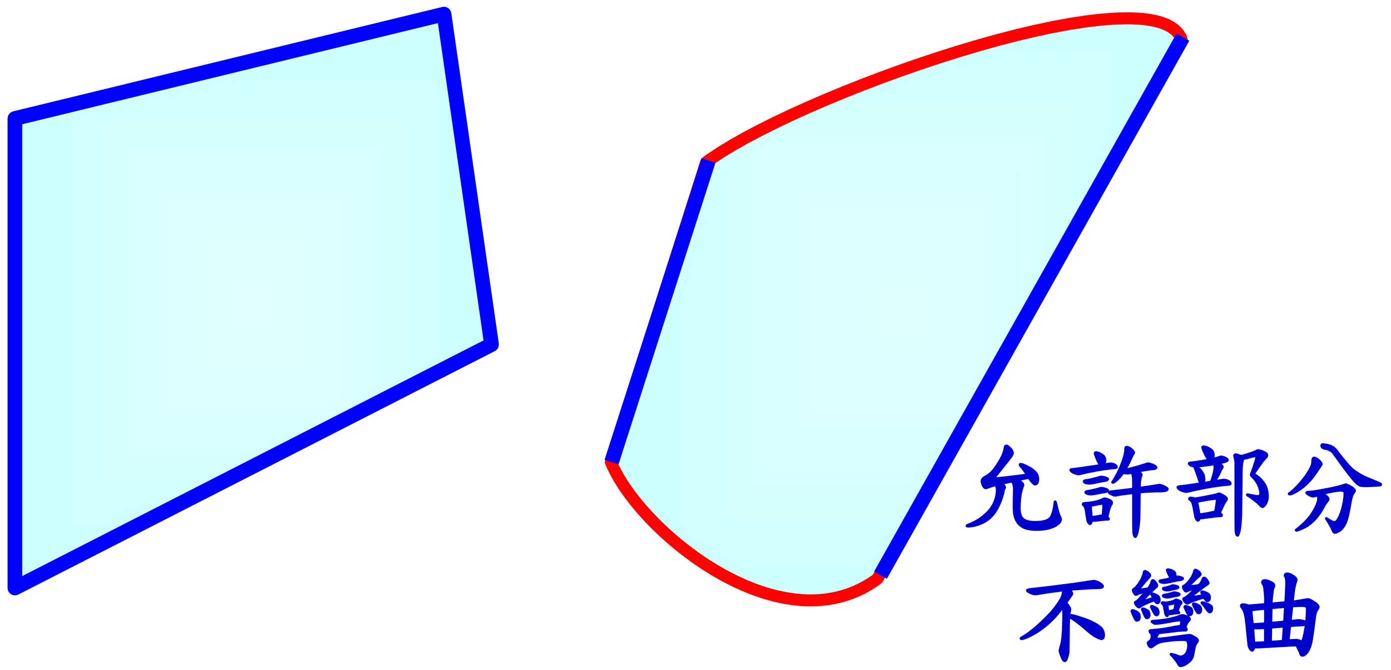


有效區域的選取

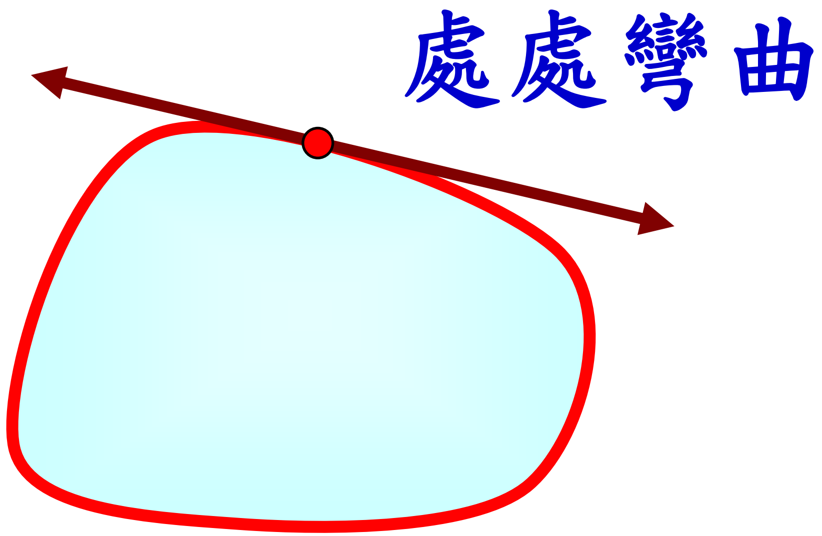


依目的選取!

嚴格凸曲線 和 凸曲線



凸曲線

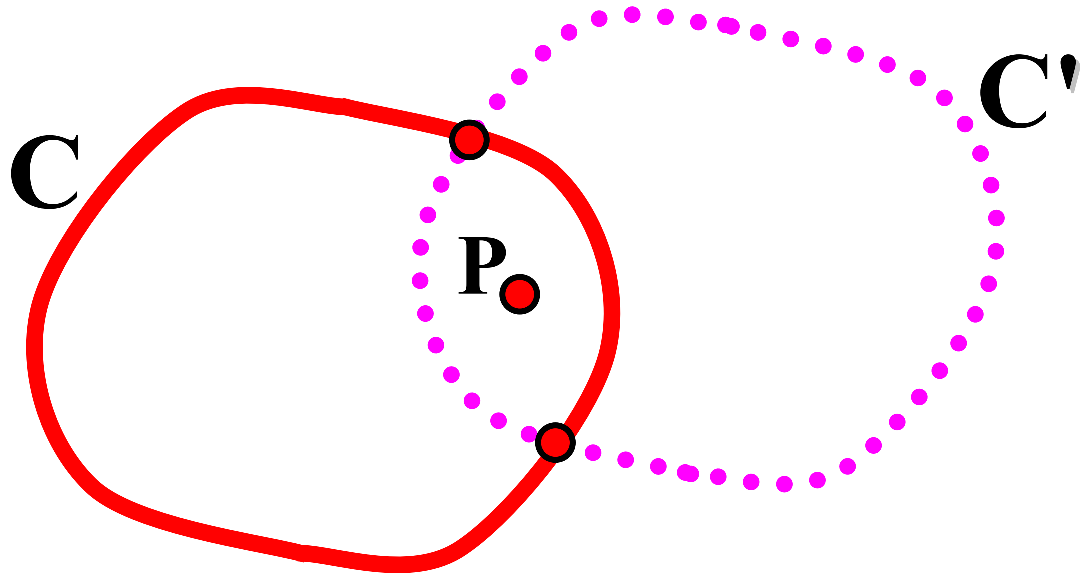


嚴格凸曲線

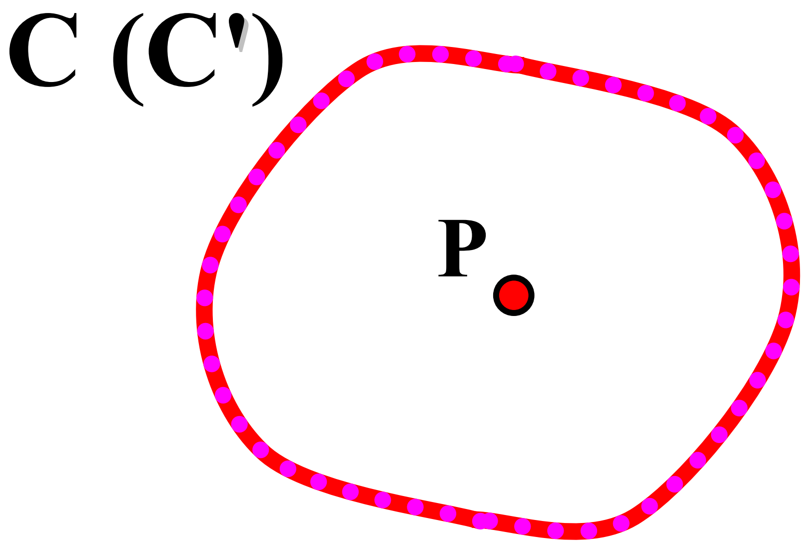
引理 當曲線C為封閉曲線，對於曲線C內任意點P：

「曲線C為點對稱嚴格凸曲線」

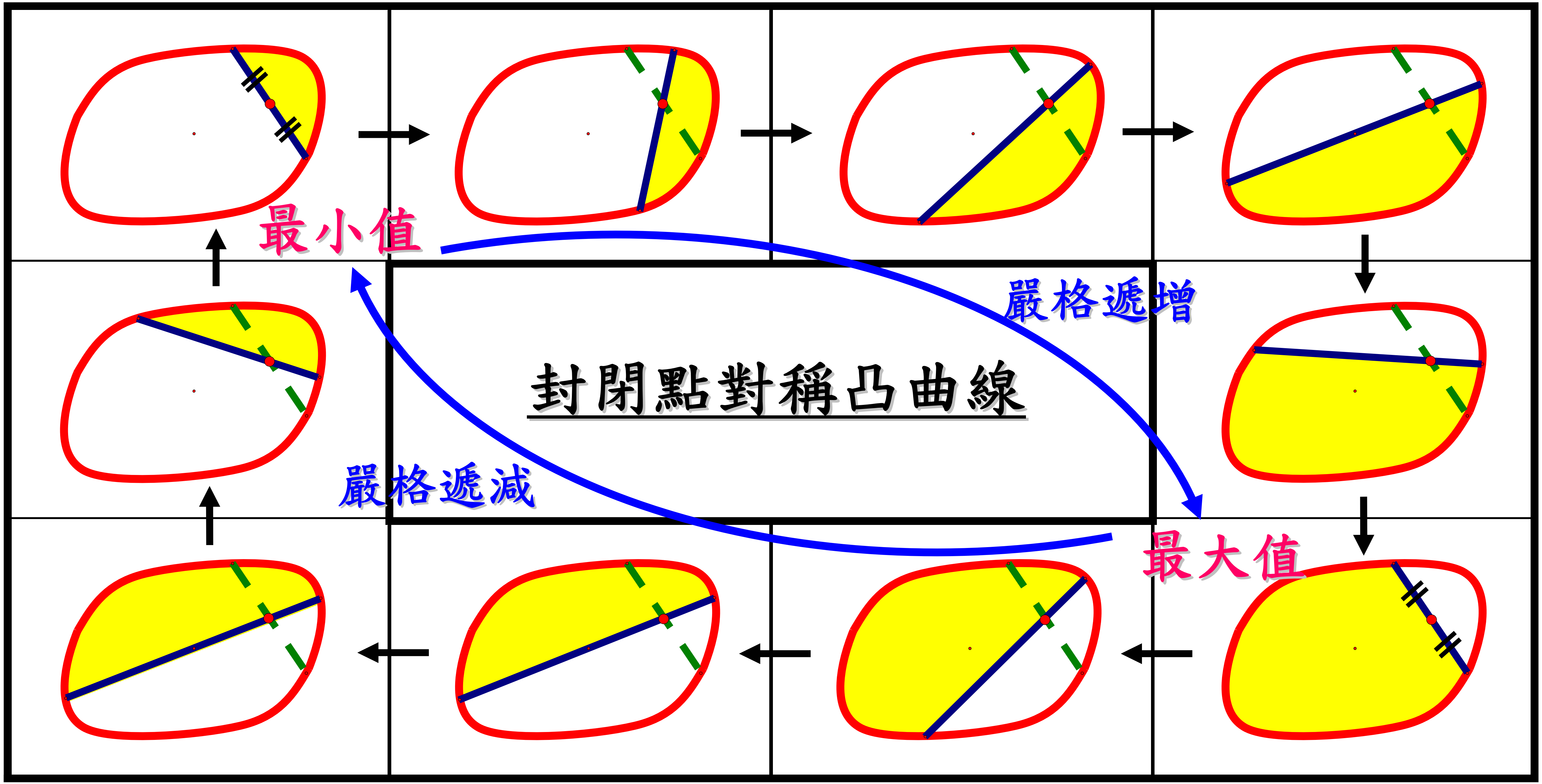
⇔「曲線C與C'恰交於兩點或完全重合」

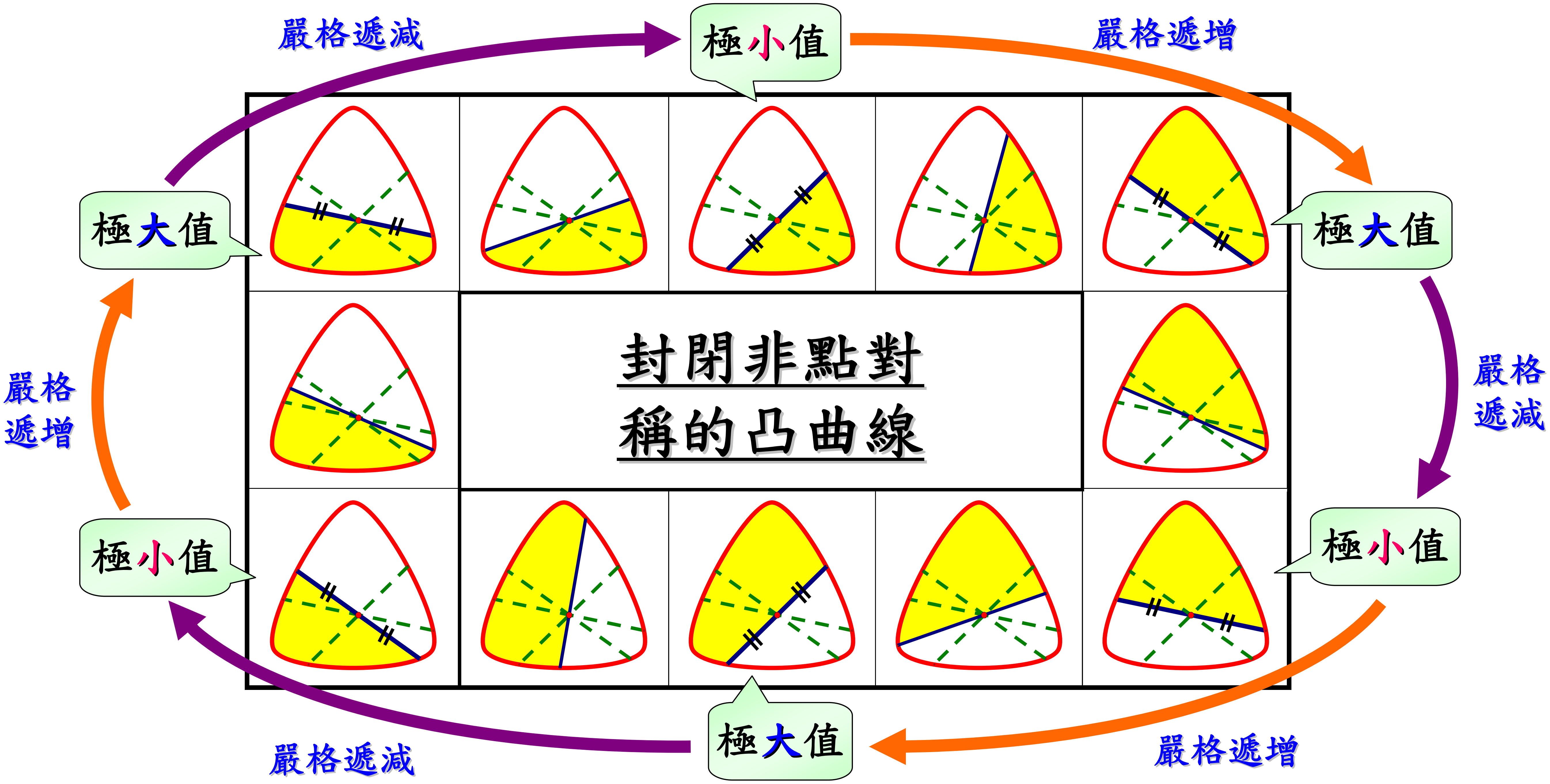


當P點非點對稱中心



當P點為點對稱中心


封閉點對稱凸曲線
最小值
最大值
嚴格遞增
嚴格遞減


嚴格遞減
極小值
嚴格遞增
極大值
極大值
嚴格遞增
封閉非點對
稱的凸曲線
嚴格遞減
極小值
嚴格遞減
極小值
極大值
嚴格遞增

給定P點

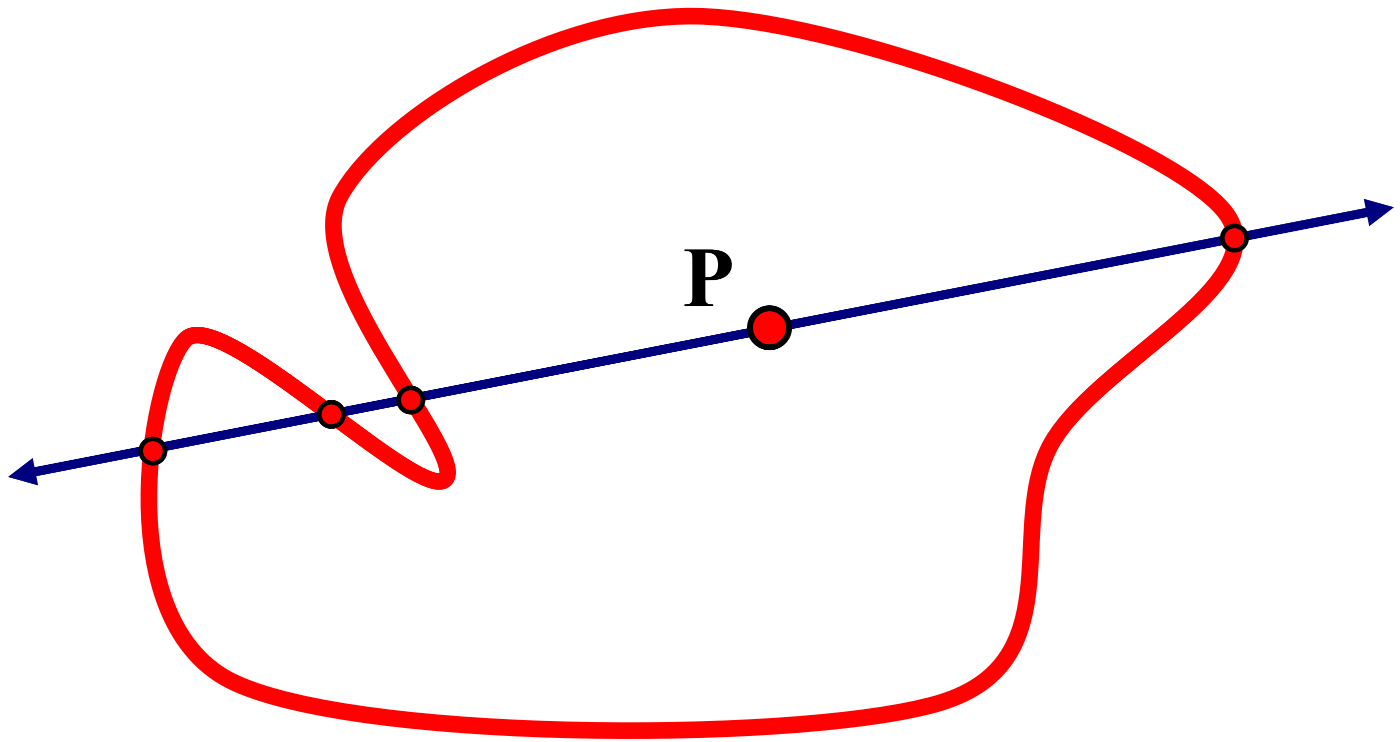
1.找出「有效區域可定義」的曲線C

2.找出「等分截線唯一」的曲線C

3.找出「等分截線圍出有效區域面積極小值」的曲線C

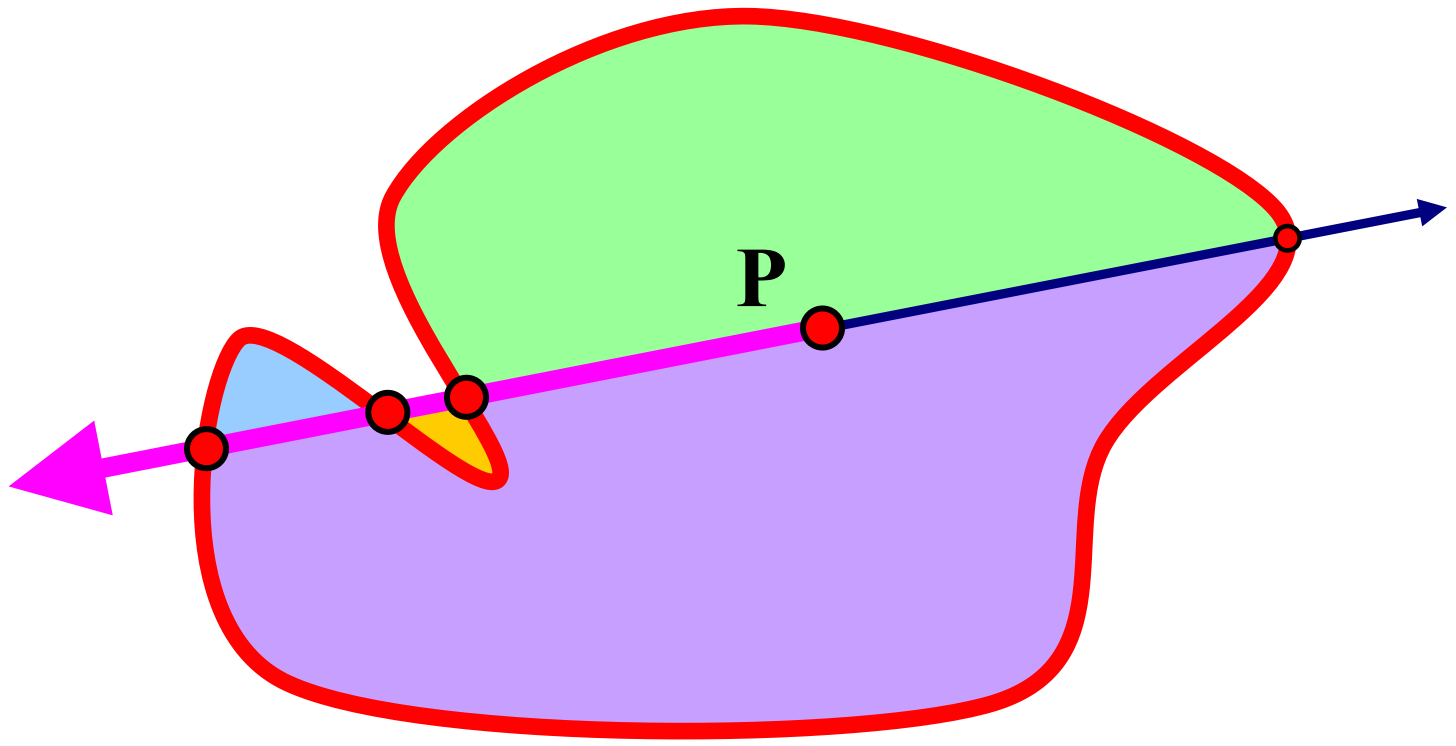
給定P點

找出「有效區域可定義」的曲線C



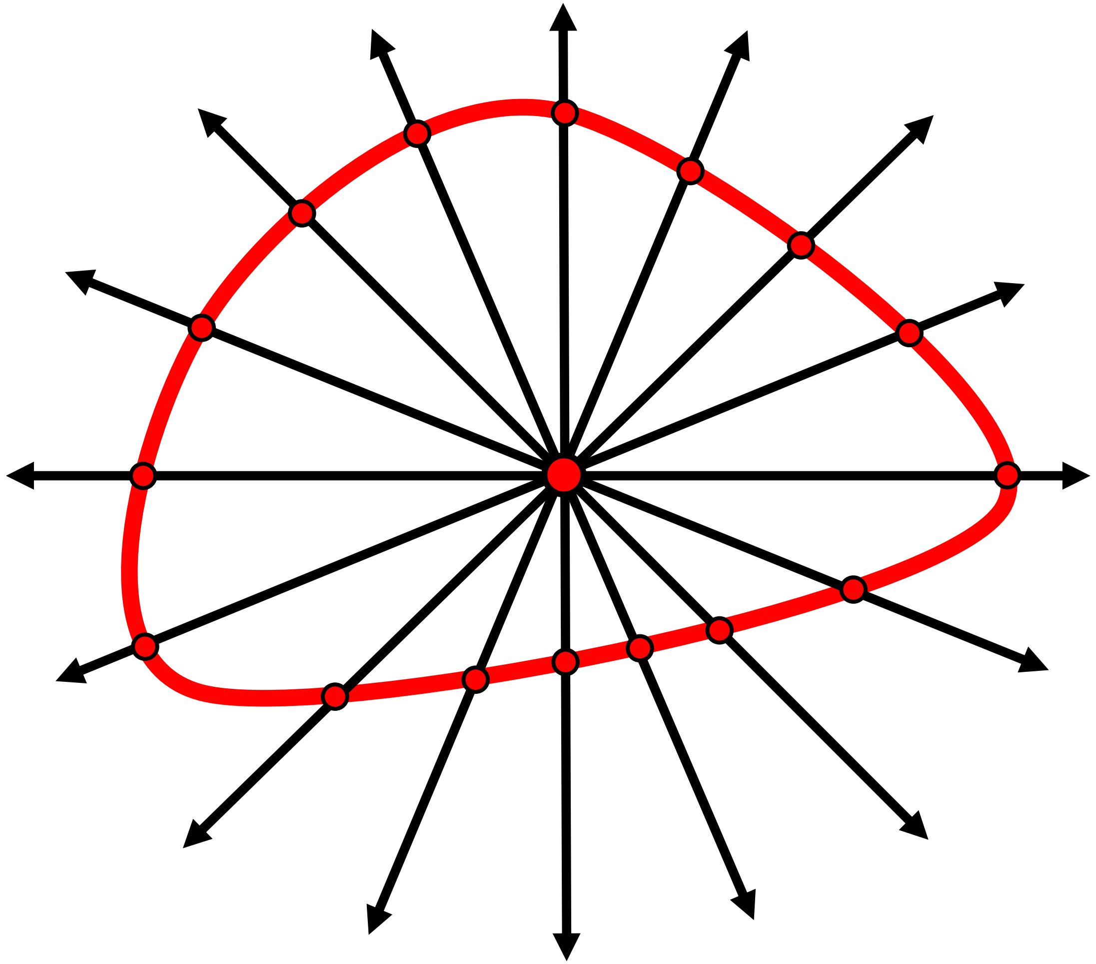
給定P點

找出「有效區域可定義」的曲線C



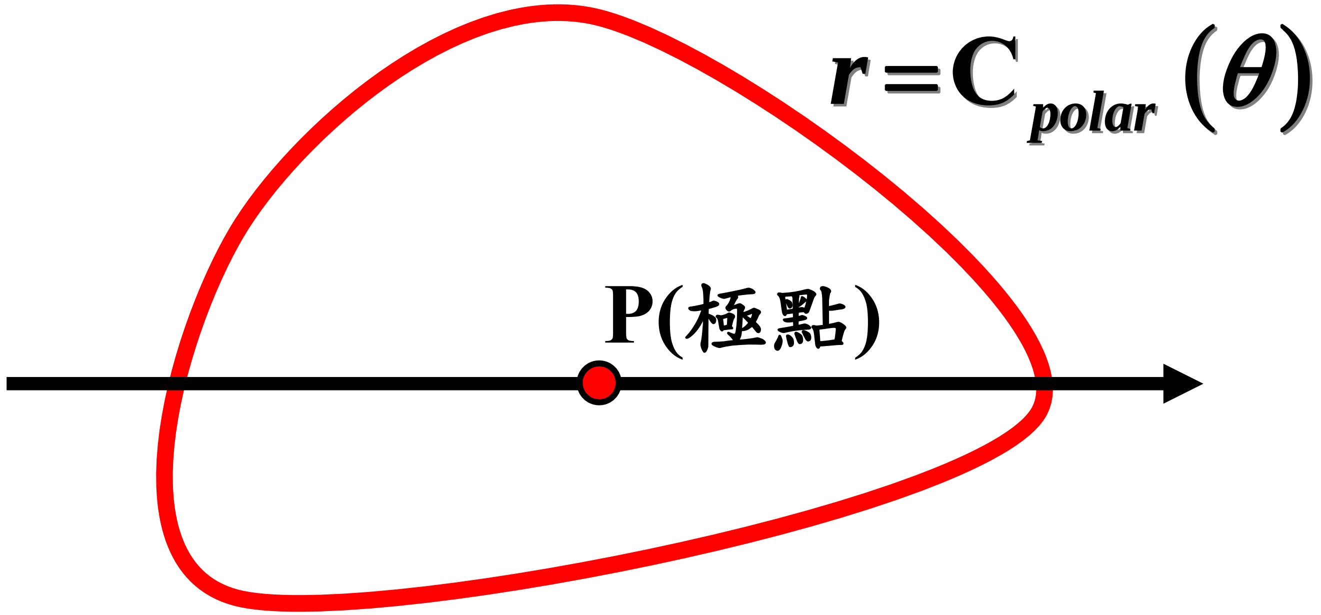
給定P點

找出「有效區域可定義」的曲線C



給定P點

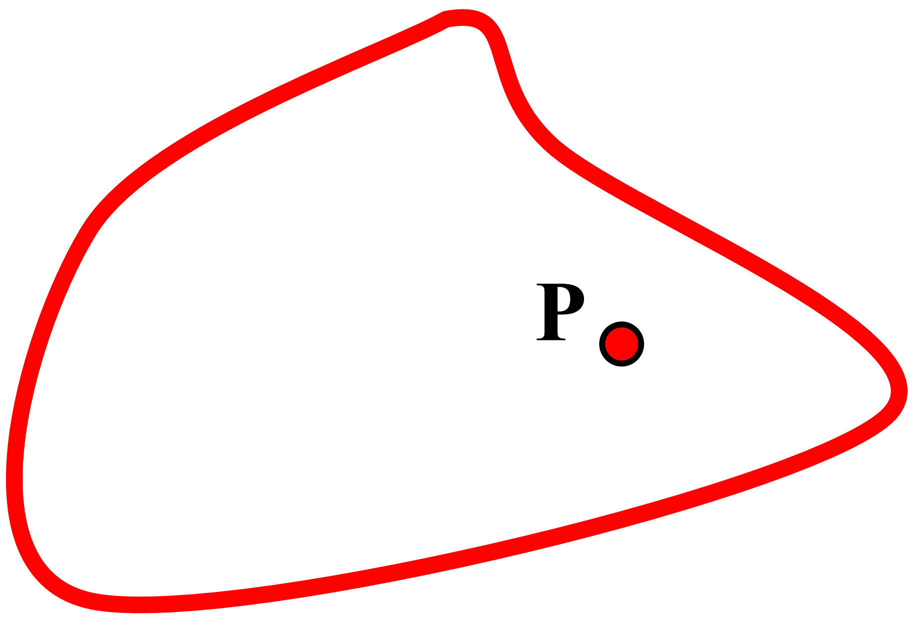
找出「有效區域可定義」的曲線C



有效區域可定義 ⇔ 曲線C可寫作顯函數 $r = C_{polar}(\theta)$

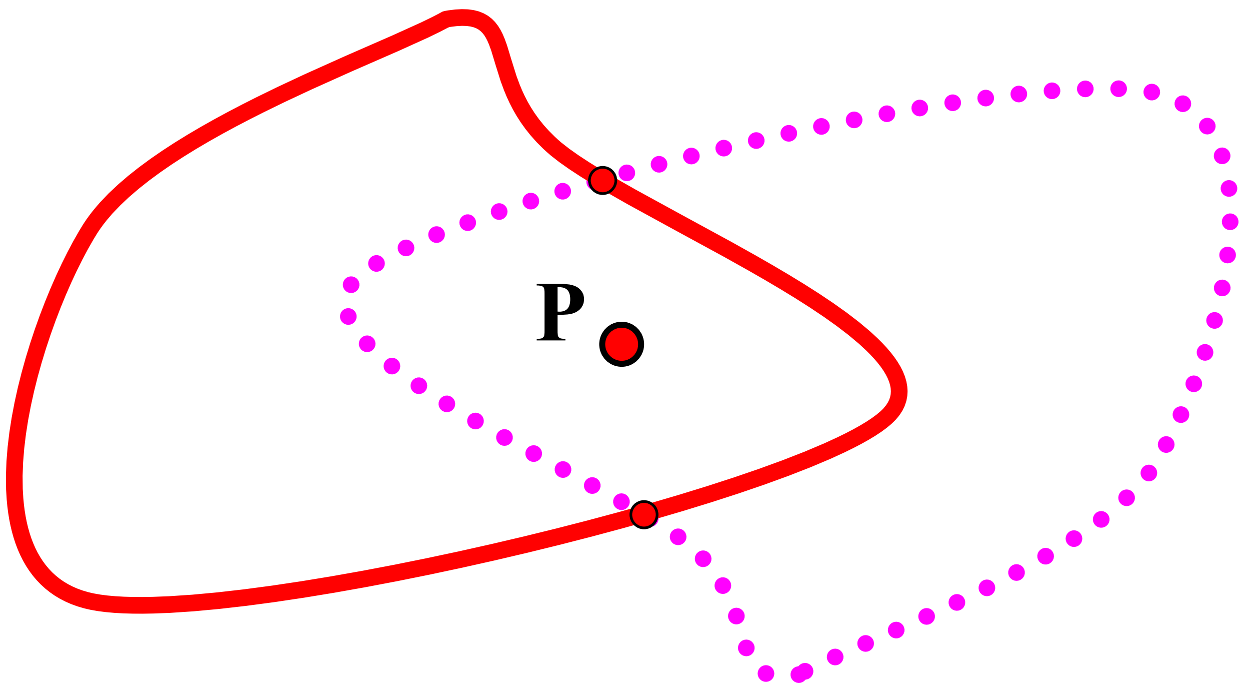
給定P點

找出「等分截線唯一」的曲線C



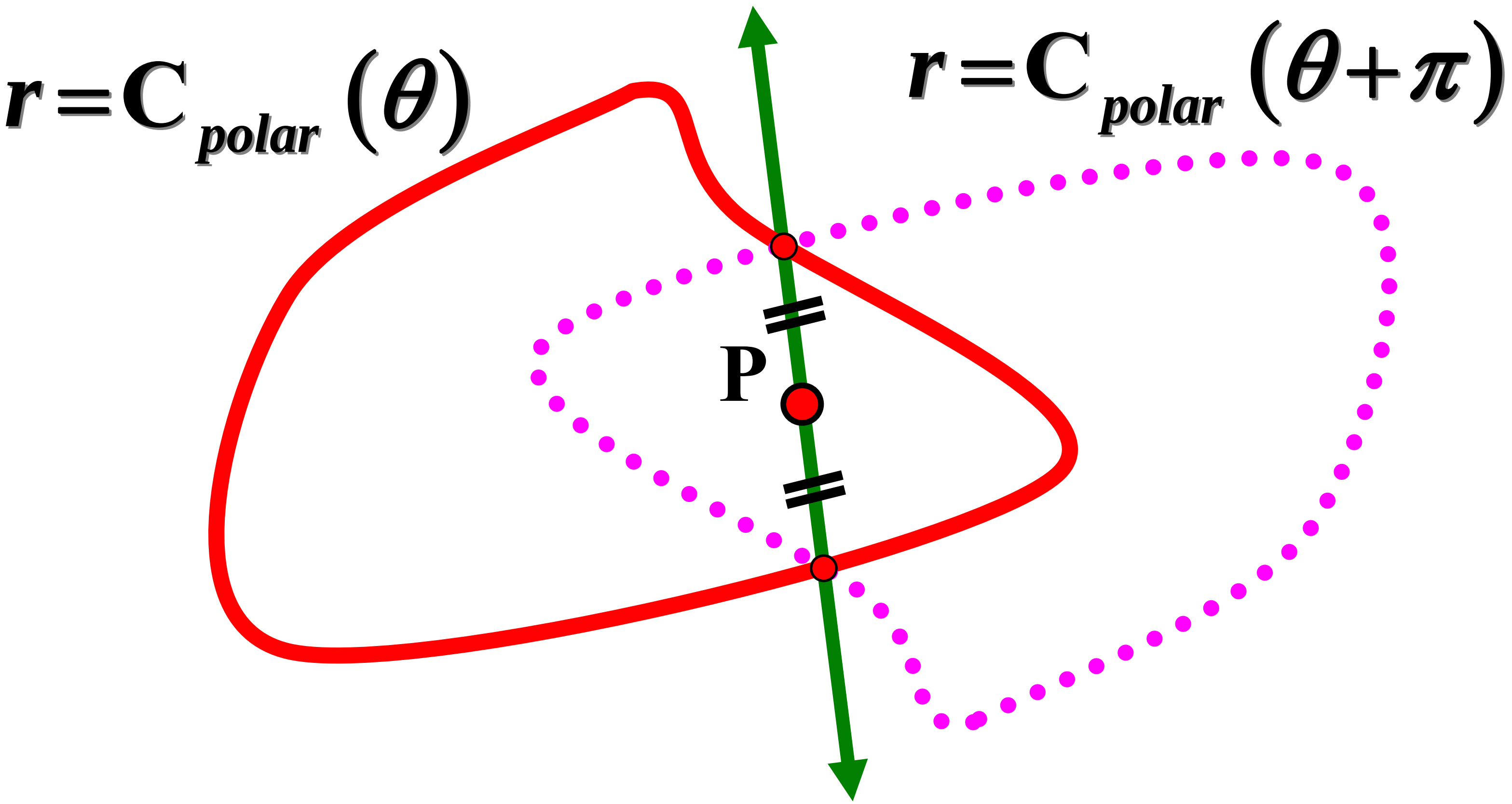
給定P點

找出「等分截線唯一」的曲線C



給定P點

找出「等分截線唯一」的曲線C



等分截線唯一 $\Leftrightarrow$

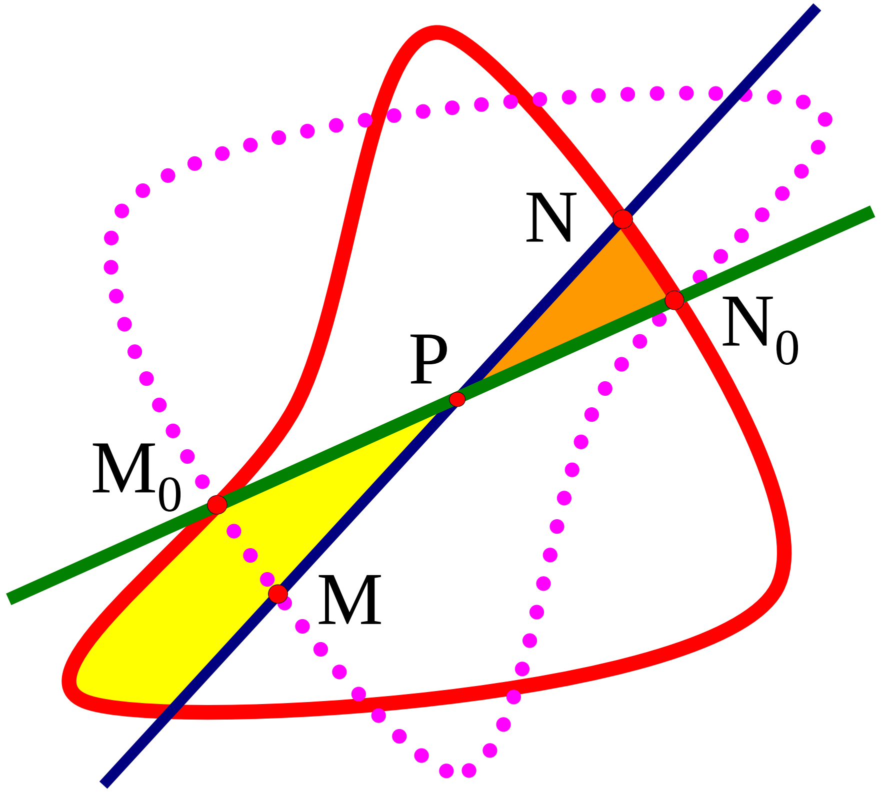
1. $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$
   只有兩組解(兩交點)

2. 曲線C可寫作顯函數
   $r=C_{polar}(\theta)$

給定P點

找出「等分截線圍出有效區域面積極小值」的曲線C

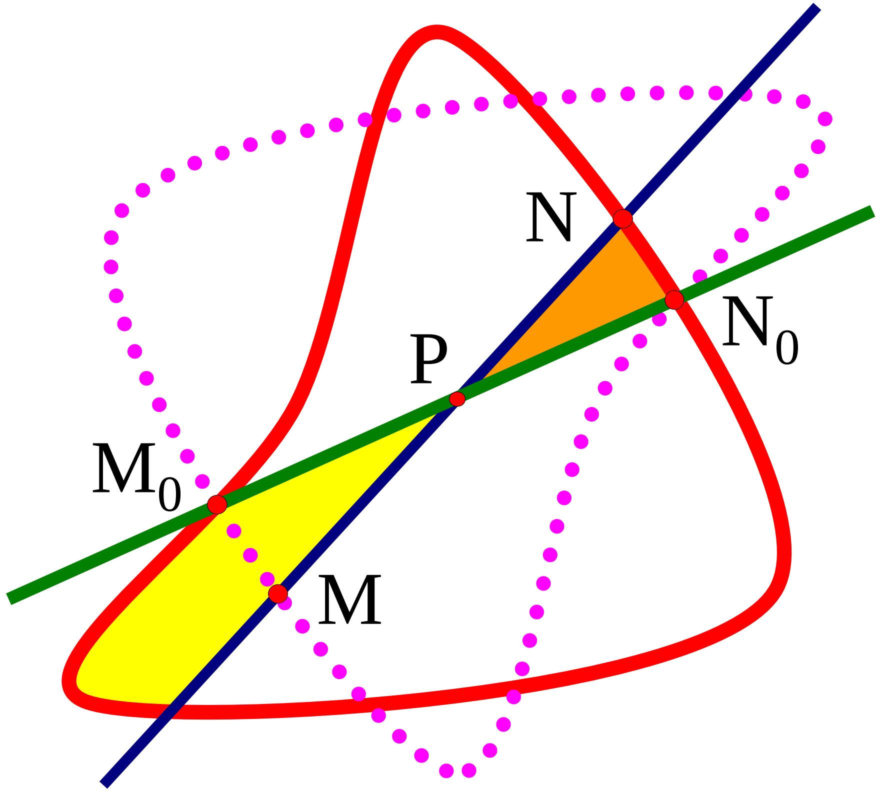
當曲線C可寫作顯函數$r=C_{polar}(\theta)$時:

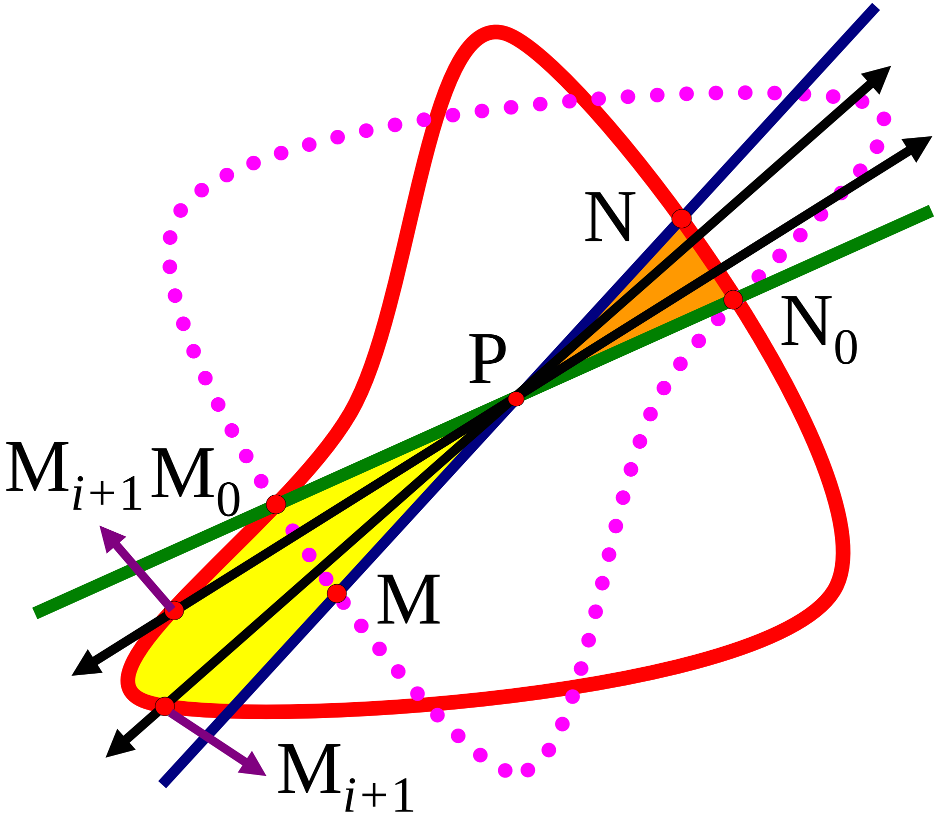


給定P點

找出「等分截線圍出有效區域面積極小值」的曲線C

當曲線C可寫作顯函數 $r=C_{polar}(\theta)$時:





$$\begin{cases} PM_i > PN_i \\ PM_{i+1} > PN_{i+1} \end{cases}$$

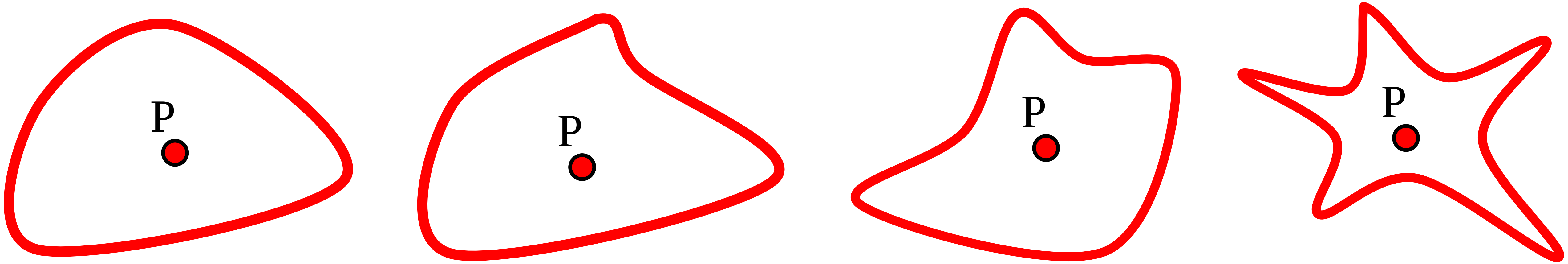
$$\Rightarrow \Delta PM_iM_{i+1}(\text{黃}) > \Delta PN_iN_{i+1}(\text{橘})$$

給定P點

找出「等分截線圍出有效區域面積極小值」的曲線C

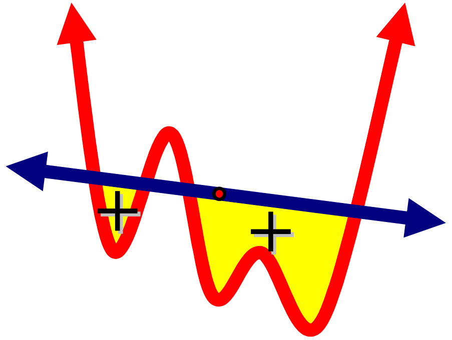
當曲線C可寫作顯函數 $r=C_{polar}(\theta)$ 時:

有效區域面積極值發生⇔直線L為等分截線

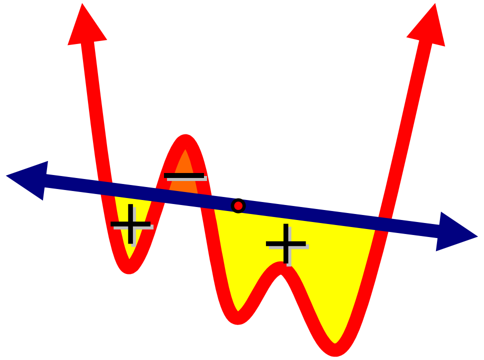


凹曲線

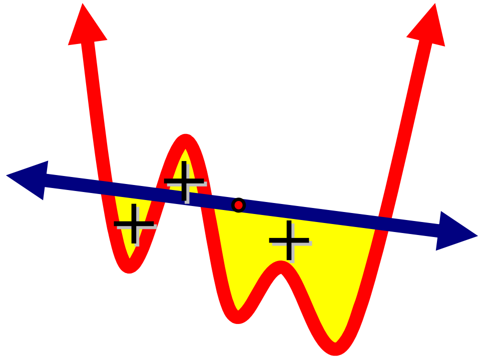
P點位置**無法**使曲線C寫作顯函數$r=C_{polar}(\theta)$:



僅考慮曲線內部之有效區域



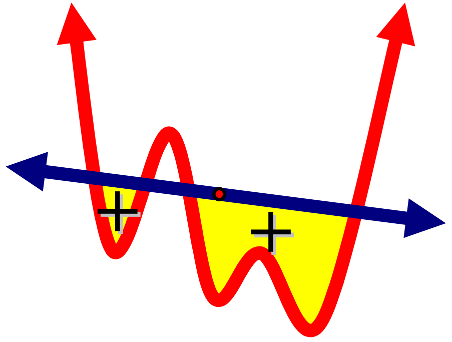
曲線內部記為正
曲線外部記為負



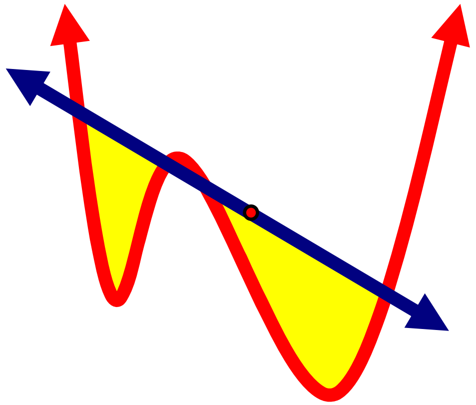
考慮全部封閉區域面積的總和

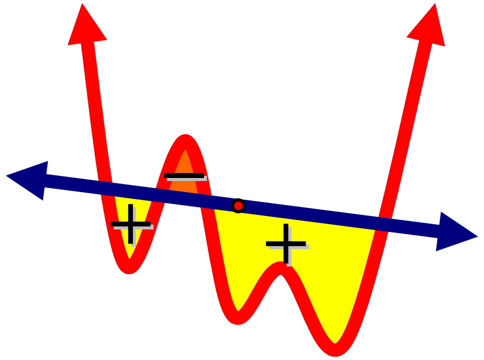
凹曲線

P點位置**無法**使曲線C寫作顯函數 $r = C_{polar}(\theta)$:

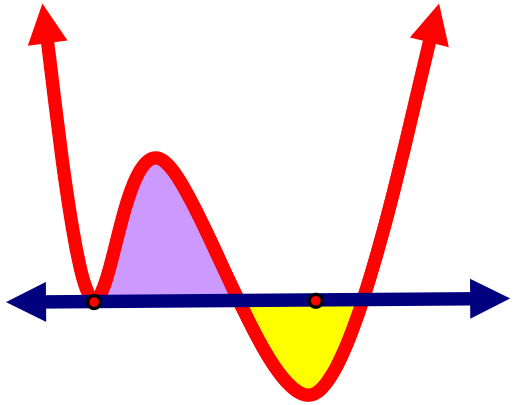


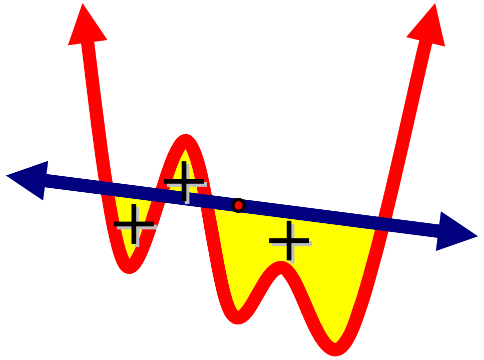
僅考慮曲線內部之有效區域



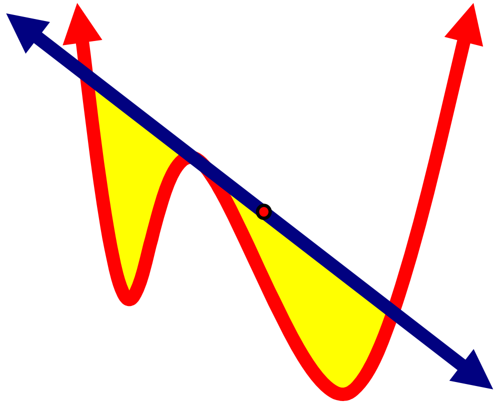


曲線內部記為正
曲線外部記為負





考慮全部封閉區域面積的總和



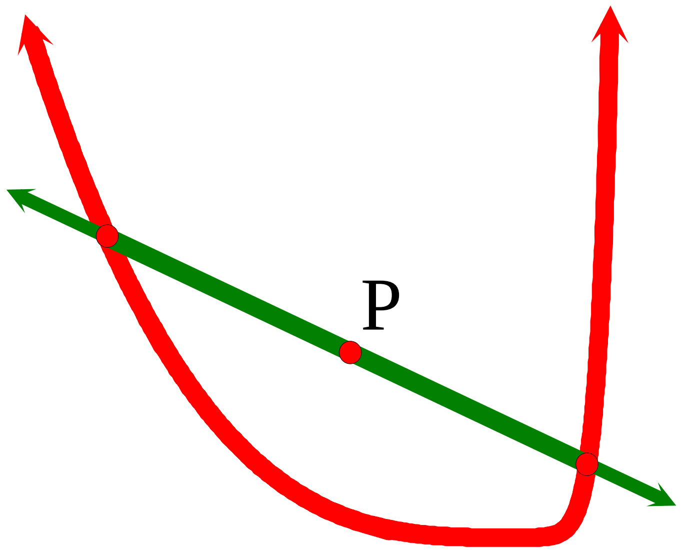
等分截線唯一性

對於曲線C內部任意點P，過點P的等分截線存在:

等分截線唯一性

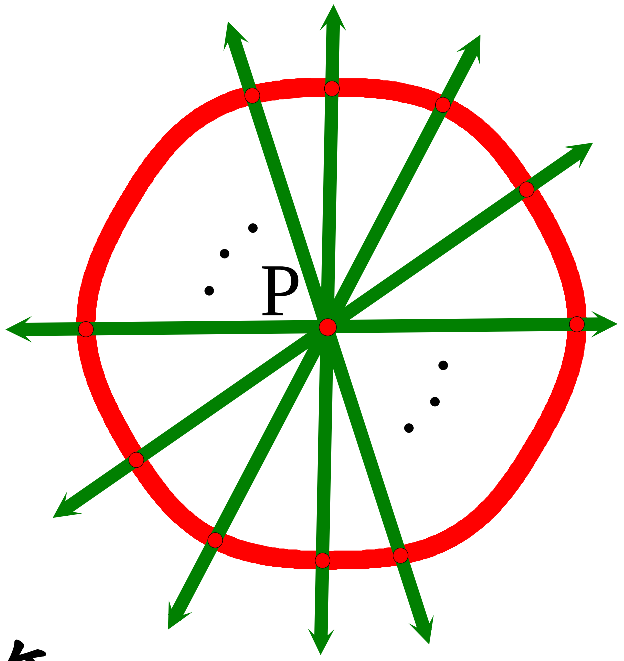
對於曲線C內部任意點P，過點P的等分截線存在:

- 非封閉 ⟶ 嚴格凸 ⇔ 唯一
- 封閉

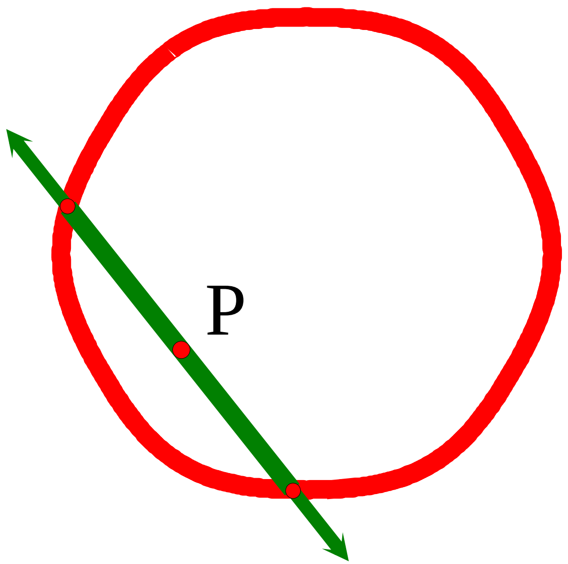


等分截線唯一性

對於曲線C內部任意點P，過點P的等分截線存在:



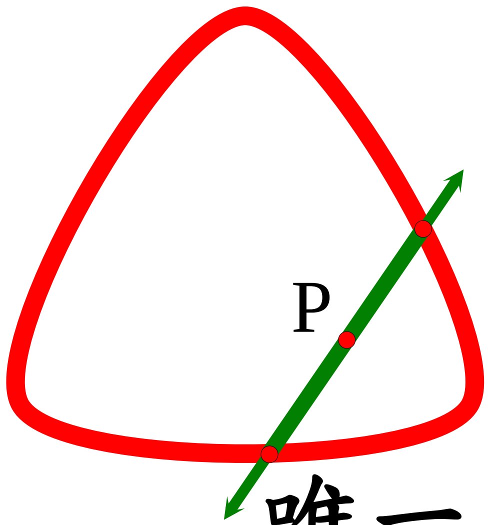
- 非封閉 ⟶ 嚴格凸 ⇔ 唯一
- 封閉
  - 點對稱嚴格凸 ⇔
    - P為中心 ⟶ 無限多條
    - P非中心 ⟶ 唯一
  - 其他



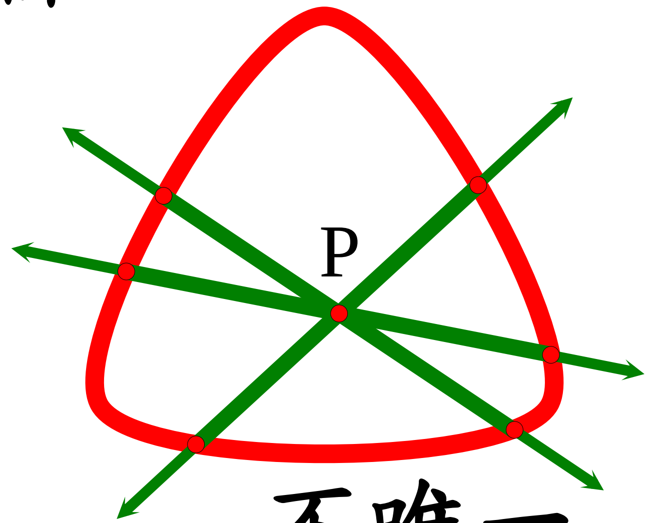
等分截線唯一性

對於曲線C內部任意點P，過點P的等分截線存在:

- 非封閉 ⟶ 嚴格凸 ⇔ 唯一
- 封閉
  - 點對稱嚴格凸 ⇔
    - P為中心 ⟶ 無限多條
    - P非中心 ⟶ 唯一
  - 其他 ⟶ 依P點位置決定唯一性



唯一



不唯一

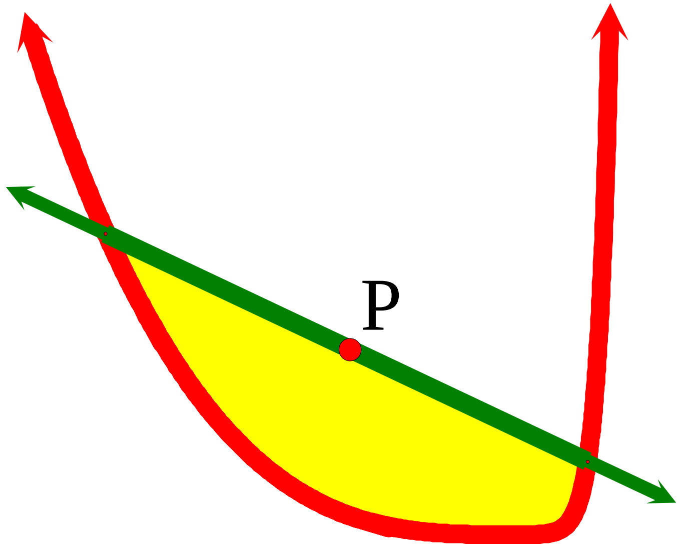
有效區域面積極小值

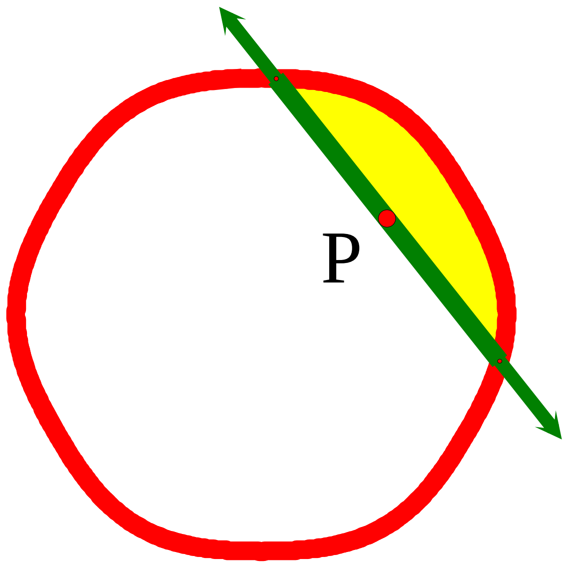
對於凸曲線C內部任意點P:

有效區域面積極小值

對於凸曲線C內部任意點P:

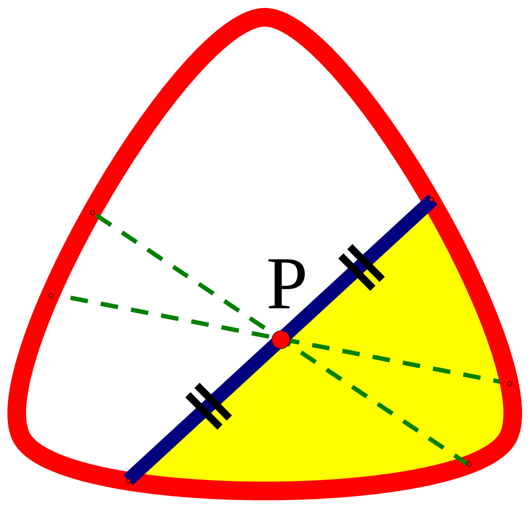
1. 非封閉 或 封閉且點對稱





有效區域面積最小值⇔直線L為等分截線

有效區域面積極小值



對於凸曲線C內部任意點P:

1. 非封閉 或 封閉且點對稱

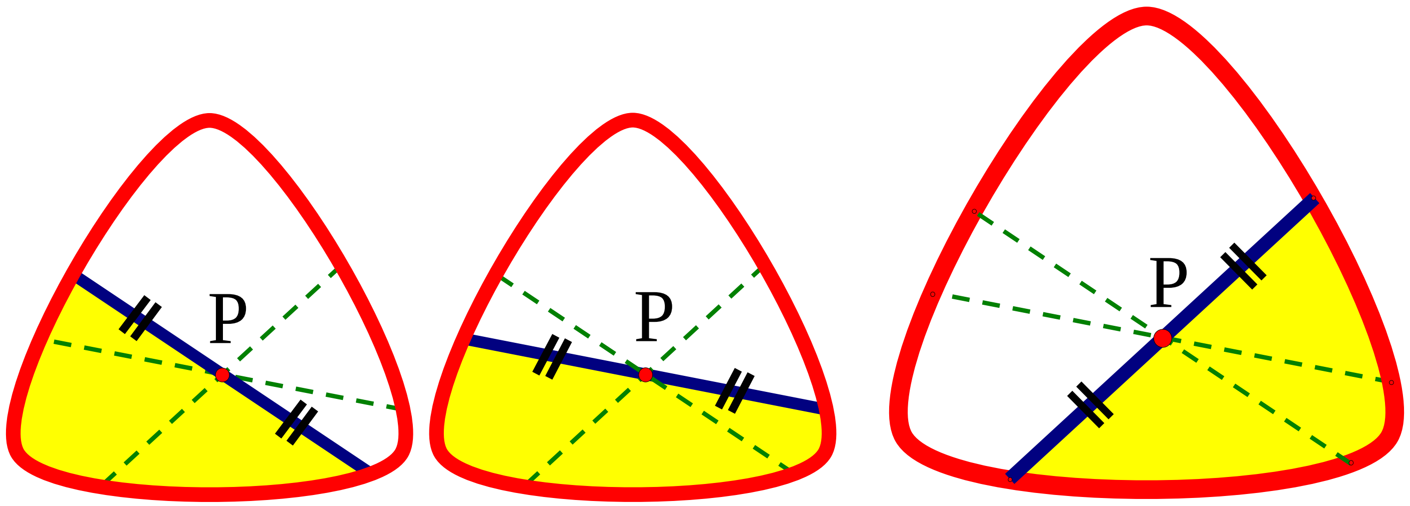
   有效區域面積最小值⇔直線L為等分截線

2. 封閉且非點對稱

   有效區域面積最小值⇒直線L為等分截線

有效區域面積極小值

對於凸曲線C內部任意點P:



1. 非封閉 或 封閉且點對稱

有效區域面積最小值⇔直線L為等分截線

2. 封閉且非點對稱

有效區域面積最小值⇒直線L為等分截線

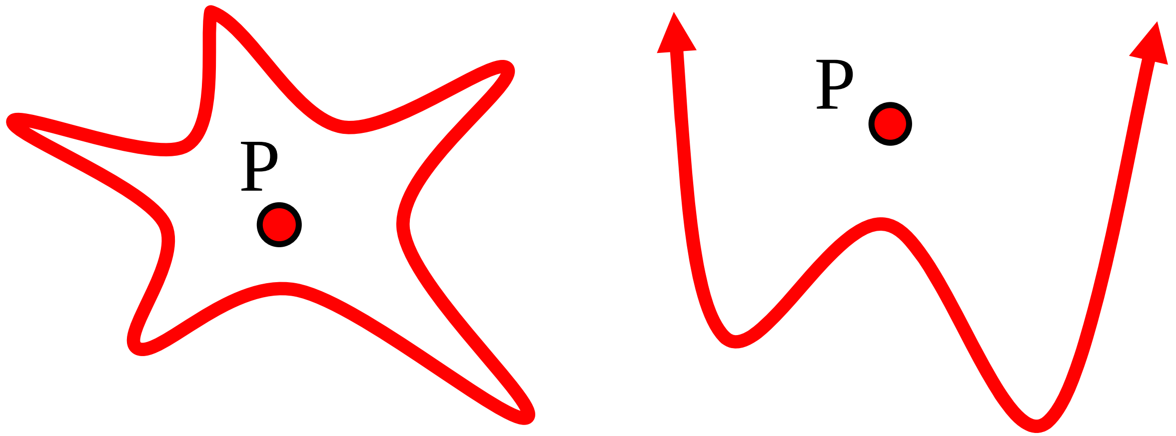
有效區域面積極小值⇔直線L為等分截線

有效區域面積極小值

對於凹曲線C: 取決於P點位置

有效區域面積極小值

對於凹曲線C: $\boxed{\text{取決於P點位置}}$

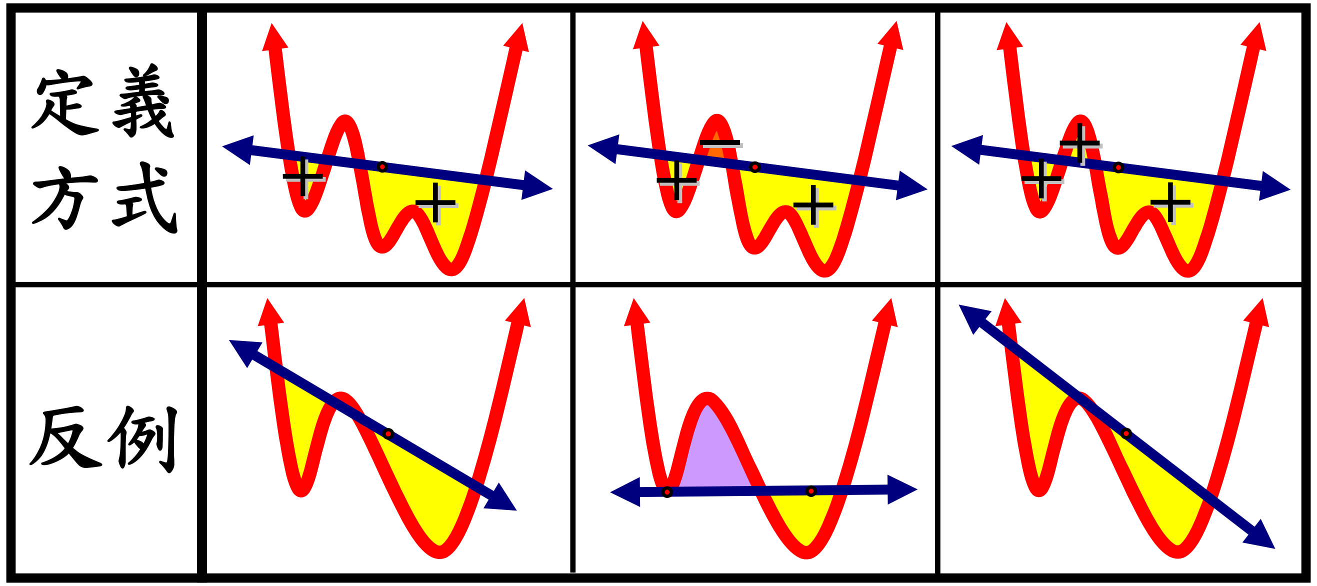


當P點位置使得曲線C可寫作顯函數 $r=C_{polar}(\theta)$:

有效區域面積極小值 ⇔ 直線L為等分截線

有效區域面積極小值

對於凹曲線C: 取決於P點位置



當P點位置使得曲線C可寫作顯函數 $r=C_{polar}(\theta)$:

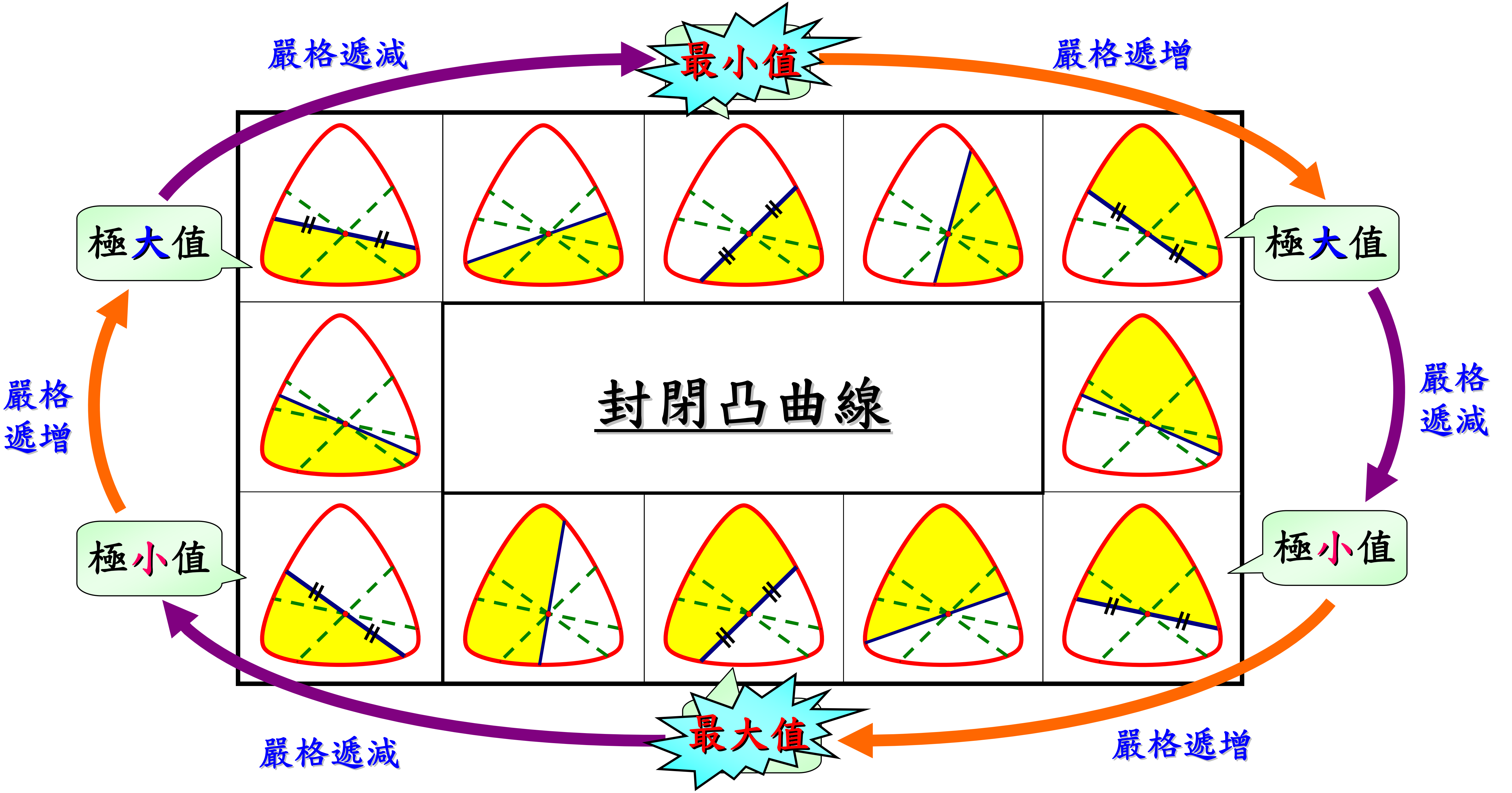
有效區域面積極小值⇔直線L為等分截線

當P點位置使得曲線C不能寫作顯函數 $r=C_{polar}(\theta)$:

上述定義方式均已找出反例(等分截線無法圍出有效區域面積最小值)

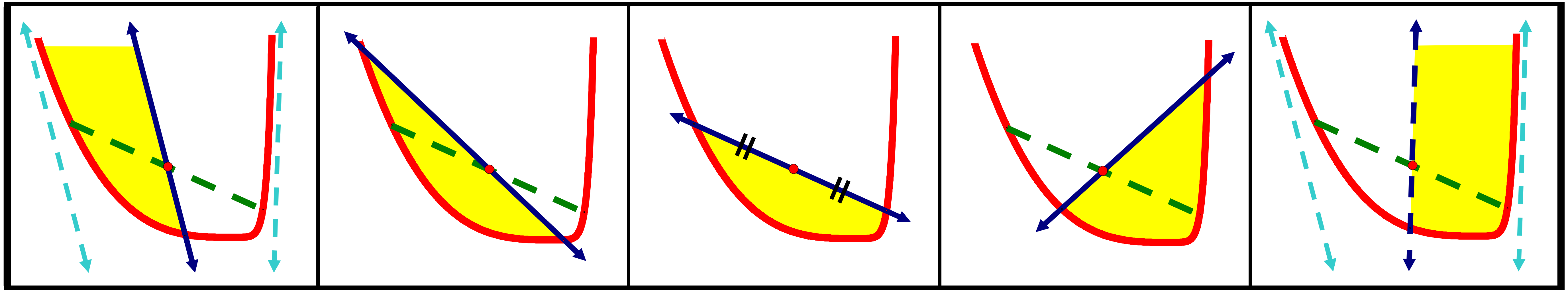
Thank You For

Your Attention!



最小值
嚴格遞減
嚴格遞增
極大值
極大值
嚴格遞增
嚴格遞減
封閉凸曲線
極小值
極小值
最大值
嚴格遞減
嚴格遞增

非封閉凸曲線



無窮大 ← 嚴格遞增 — 最小值 — 嚴格遞增 → 無窮大

$m \to \lim\limits_{x \to -\infty} C'(x)$

等分截線

$m \to \lim\limits_{x \to +\infty} C'(x)$