目錄

摘要

本研究報告針對槍手賽局進行**最佳策略**之探討:

有一天，三位槍手 A, B, C 決定來一場槍戰比較實力，依序輪流開一槍，分別有各自的命中率 a, b, c，若不限制射擊對象，但是如果射擊不利於己時，也可選擇對空鳴槍不射擊。則此時做何選擇才能讓自己的**勝率**最高呢? (必須射死其他槍手才算勝利)

我們首先以**樹狀圖**及**幾何**的方式分析兩人槍手賽局,兩人最佳策略都是射擊對方，接著以**轉移矩陣**及**全決策盒**討論三人槍手賽局，發現最可能成為最佳策略組合的策略是**槍手 A 等待槍手 B, C 兩人先對決**，勝負分曉後再加入賽局。

在缺乏任意槍手命中率值或任意槍手過去的行動(間接提供槍手命中率的範圍)的情況下,我們發現藉由**全決策盒**可以利用**條件機率**及**截面**的概念找出槍手的不完美最佳策略。最後推廣到一般化賽局的全決策空間，可以同時分析完全信息及不完全信息賽局的策略選擇，為賽局理論提供一個新的分析方法。

Abstract

The Game Theory is essentially a strategic thinking through which the maximal winning possibilities and survival in the rivalry are secured. In the book entitled “Paper, Scissors, Stone,” some intriguing aspects about the gunmen are mentioned. When two gunmen pull the trigger alternately, the targets not considered, what is a gunman’s best strategy to have the maximal winning possibilities given their variations in shooting precision? We think, however, the conclusion achieved in the book should be an ad hoc case; the key to the decision-making lies in the rivals’ difference in shooting precision. We would like to come up with each gunman’s best strategy and winning possibilities thereby.

To begin with, we use a tree diagram to deal with the scenarios where the two gunmen shoot each other. We have found the following.

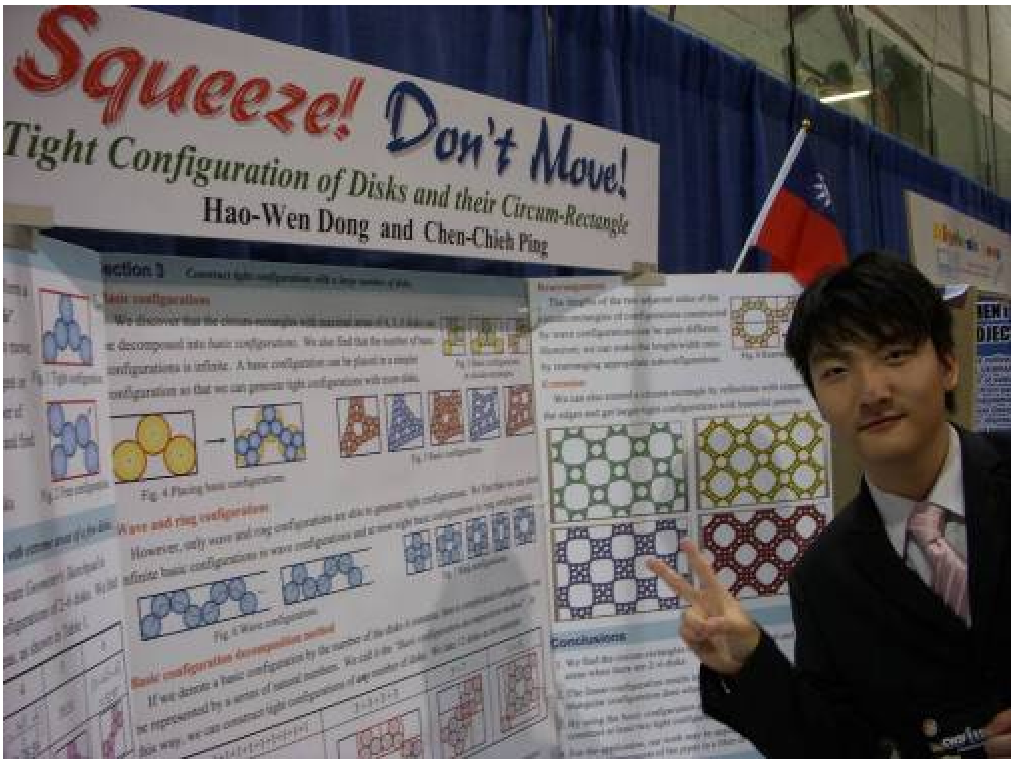
(1) The favorable situation goes to the gunman who opts to shoot.

(2) The favorable situation goes to the gunman who takes the initiative.

In turn, we use the calculation in transition matrixes to discuss shootings among three people. We have found that each gunman’s best strategy is not unchangeable; a different one will emerge based on the variations in shooting precision.

Besides, we bring forward some geometrical thinking which previous game theories are devoid of. We hope a new dimension will unfold with the very geometrical thinking instilled in game theories.

作者簡介



我叫平震傑，是個熱愛科學的人。從國小就開始的科展經驗中，我發現進行研究最大的意義，是在於實驗過程中的點點滴滴、和尋獲成果的喜悅！從每一次的實驗、報告、到比賽，都讓我獲益良多。這次的國際科展，除了與大家分享我們的研究外，希望也能有更多的收穫！

作者簡介

有些人熱愛在球場上奔馳，有些人沉浸於自己的音樂狂想中，而我則是在數學的世界中，找到了自我，看到了未來。 對於大千世界中的一切事物，我總是抱持著一顆好奇的心，樂於發現這一切有趣的現象與規則。 我是董皓文，這次在這個看似簡單的題目中，又再次激發了我對數學的熱愛。

壹、研究動機

在一個悠閒的午後，我翻開了一本有關賽局理論的書《剪刀石頭布》，其中有一道有趣的題目是這樣說的:

假如有三個人，打算來一場槍戰，槍戰的規則是:

槍法最差的可以開第一槍，第二差的開第二槍，依序輪流開槍，直到剩下一人活著為止。但根據統計，槍法最差只有三分之一機會打中目標，第二差的有三分之二機會，槍法最好的則是彈無虛發。如果你是槍法最差的那個，你該對誰開槍?

《剪刀石頭布》

書中提出了以下的解答:

對空鳴槍就好!如果你瞄準槍法第二差的，而且還真的打中，輪到下一個，你就必死無疑；如果你射死了槍法最好的，也只剩三分之一的活命機會。換言之，如果你射死了任何一個對手，只會讓你的情況更糟，因為這麼一來，剩下的對手再也沒別的目標，鐵定會瞄準你。只要你第一槍誰都沒打中，就還有機會開第二槍，而且勝算更大。

《剪刀石頭布》

然而，我們對此感到疑惑，**命中率較差的人，真的只能等待結果嗎? 彼此間命中率大小的差距對結果沒有影響嗎?** 是否有更完善的方法可以探討這個問題? 因此，我們決定對這個問題做更深入的探討，並提出一些在討論賽局的時候，有用且新穎的思考模式。

貳、研究目的

一、 探討兩人槍手賽局中，槍手們在不同命中率下的最佳策略組合及勝率。

二、 探討三人槍手賽局中，槍手們在不同命中率下的最佳策略組合及勝率。

三、探討不完全信息賽局中，槍手的不完美最佳策略。

四、 探討決策空間對於一般化賽局的用途及延伸。

参、研究器材

Wxmaxima、Geogebra、Mathematica、樹狀圖、吸收馬可夫鏈。

肆、名詞定義

一、**槍手**: 我們假設這些槍手都是明智的，會<u>選擇對自己最有利的應對方式</u>，以正體大寫英文字母表示(A,B,C)。

二、**槍手命中率**: 槍手射擊他人，<u>命中且使他人死亡的機率</u>，以槍手相對應的斜體小寫英文字母表示(a,b,c)。並以$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$表示槍手沒有命中的機率($\bar{a}=1-a,\ \bar{b}=1-b,\ \bar{c}=1-c$)。

三、**勝率**: <u>槍手得勝(只剩下槍手一人)的機率</u>，以相對應的槍手命名，記為 $P_{Xwin}(S)$，表示在條件 S 下，槍手 X 的勝率。

四、**勝率分布圖**: 在直角座標系中，<u>紀錄每一個行動後之勝率分布</u>(P_{Awin}, P_{Bwin}, P_{Cwin})。

五、**策略(決策)**: <u>槍手所有可能的各種行動</u>，以$\overline{\mathrm{A}}$表示 A 的策略，如 A 射 B、A 射 C 或 A 不射。

六、**最佳策略**: <u>對槍手自身有最大得勝率的策略</u>，以$\overline{\mathrm{A}}^{\circ}$表示 A 的最佳策略。

七、**最佳策略組合**: 兩人槍手賽局-($\overline{\mathrm{A}}^{\circ},\overline{\mathrm{B}}^{\circ}$)，三人槍手賽局-($\overline{\mathrm{A}}^{\circ},\overline{\mathrm{B}}^{\circ},\overline{\mathrm{C}}^{\circ}$)。

八、**不完美最佳策略**: 當槍手沒有完全信息(槍手們的命中率及過去槍手們的決策)時，<u>有最大機率成為槍手最佳策略者</u>。若依其機率比例做決策，則稱不完美最佳混合策略。

九、**轉移矩陣**: 以 M(X×Y)表示 X 射 Y 這個動作對應到的轉移矩陣。

十、**全決策盒**: 在直角座標系中，將每一點(x, y, z)對應到當 $a = x, y = b, c = z$ 時，槍手 A,B,C 的最佳策略組合($\overline{\mathrm{A}}^{\circ},\overline{\mathrm{B}}^{\circ},\overline{\mathrm{C}}^{\circ}$)。

十一、**決策臨界面:** 在決策盒中，<u>某槍手兩不同策略成為最佳策略所佔的命中率範圍之間的分界面</u>。如果是槍手們兩不同策略組合成為最佳策略所佔的命中率範圍之間的分界面，則稱決策組合臨界面。

伍、研究過程

一、前提假設、預備定理及預備知識:

(一) 遊戲規則:

設有 n 個人，照固定的順序輪流射擊，每個人都能自行決定射擊對象，直到剩下一個人存活為止，此人即成為勝利者。

(二) 前提假設:

1. 槍手是明智的，會選擇對自己最有利的策略。
2. 命中率不會改變，且不討論為零的情形，即 $0 < a,b,c \leq 1$。
3. 槍手賽局具有馬可夫性質。(當兩事件只有時間點不同，其餘條件(玩家、命中率)皆相同時，兩事件發生的機率相同。)

(三) 預備定理:

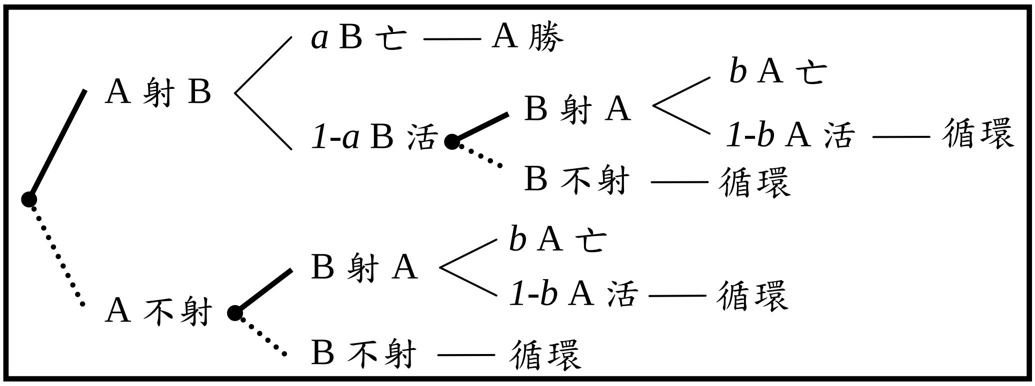
若前後槍手組合不變，在時間 t_1 時，槍手 X 有最佳策略 S。則在時間 t_2 時，槍手 X 的最佳策略亦為 S。

Proof:

由於最佳策略是經由比較不同策略下勝率值後所得到的結果。然而當槍手組合不變時，由馬可夫性質知其勝率值不變，故經比較後，所選擇的最佳策略相同。

二、樹狀圖說明:

為了表達所有可能的發展情況及槍手們不同的策略選擇，我們運用了特殊的樹狀圖表示方法，在此簡略說明之: 以 A, B 兩人對射之情形為例。



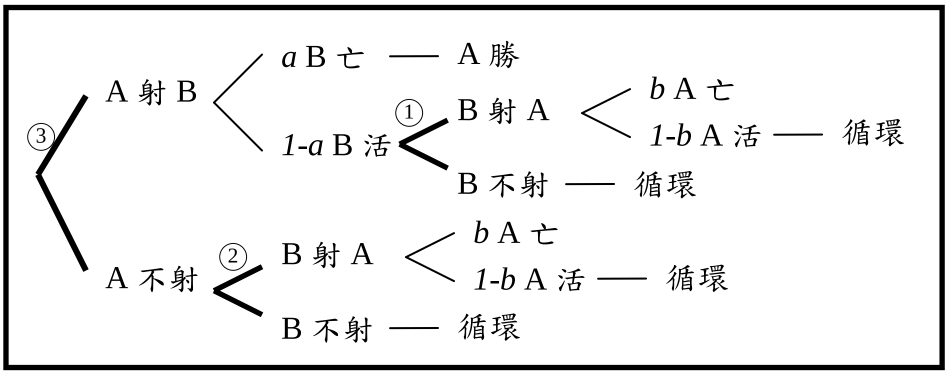
1. 細實線(——): 發展路徑
2. 粗實線(━━): 槍手的選擇點，只能擇一
3. 粗實線加圓點(●━━): 完成討論後得出的最佳策略
4. 虛線(●····): 完成討論後得出的非最佳策略
5. 循環: 回到原點再次經歷同樣的路徑(同樣的條件)

此處每一次循環後，由於槍手的組合皆相同，由定理 1 可知: **每一次循環中，槍手們的最佳策略都相同，故發展都會相同，故討論時不需再考慮循環後的可能發展(將會是固定的)。**

三、兩人對射時，槍手的最佳決策探討:

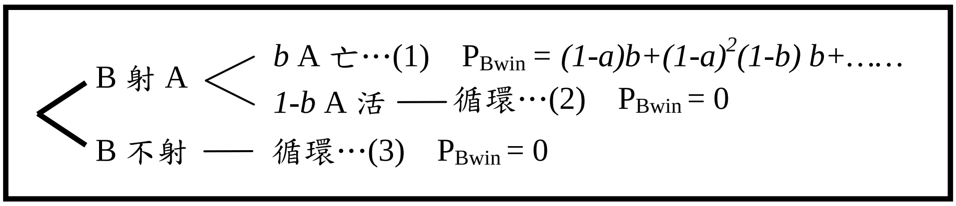
(一) 勝率比較:

設兩選手為 A, B，且命中率分別為 a, b，做出樹狀圖如下:



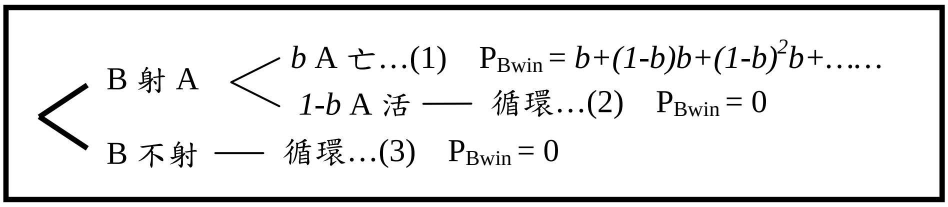
1. B 的最佳決策討論:

(1)在①時，對槍手 B 而言，其勝率如下:



由於 $a, b > 0$，故槍手 B 在①會選擇射擊 A。

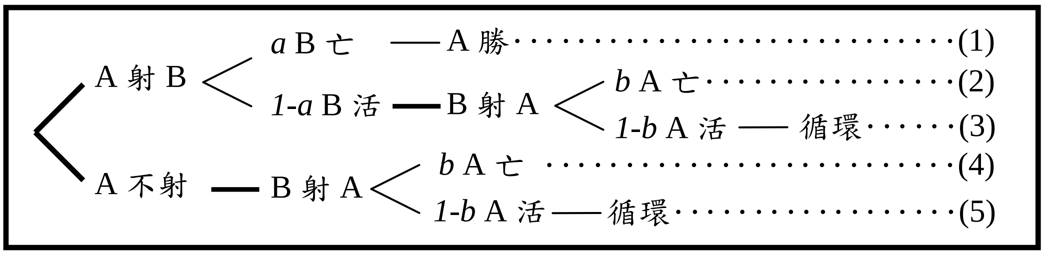
(2)在②時，對槍手 B 而言，其勝率如下:



同理槍手 B 在②也會選擇射擊 A。

2. A 的最佳決策討論:

已知在①②時，槍手 B 都會選擇射擊 A，樹狀圖簡化如下:



(1) P_{Awin}(A 射 B) = 第一回合 P(1) + 第二回合 P(1) + 第三回合 P(1) +……

$$= a + (1\text{-}a)(1\text{-}b)a + (1\text{-}a)^2(1\text{-}b)^2a + \ldots\ldots$$

$$= \frac{a}{1-(1-a)(1-b)}$$

(2) P_{Awin}(A 不射) = 0

因為 P_{Awin}(A 射 B) > P_{Awin}(A 不射)，<u>所以 A 也會選擇射擊 B</u>

(二) **總結:**

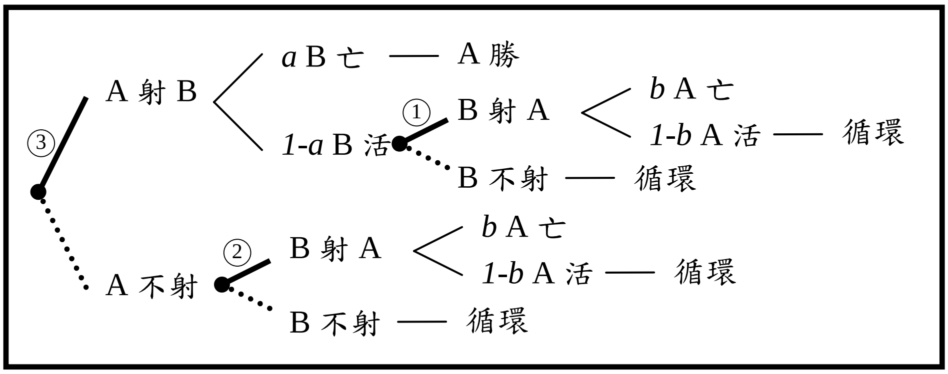
1. **槍手 A 會射擊 B,槍手 B 也會射擊 A。即其最佳策略組合為(A 射 B,B 射 A)。**

2. $$P_{Awin}=\frac{a}{1-(1-a)(1-b)}=\frac{a}{1-\bar{a}\times\bar{b}}$$

$$P_{Bwin}=\frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)}=\frac{\bar{a}\times b}{1-\bar{a}\times\bar{b}}$$

(三) **延伸與討論:**

1. 另一種思考模式:



<u>考慮①</u>: 若已知槍手 A 選擇射 B,則如果槍手 B 不射時,便沒有任何勝算,而若槍手 B 選擇射擊 A,那他還能增加一點勝算。由此,我們就可以了解到槍手 B 在①時會選擇射擊 A。

<u>考慮②</u>: 若已知槍手 A 不射擊,則此時如果槍手 B 選擇不射,也不會有任何的勝算,但如果槍手 B 選擇射擊 A,因為槍手 A 不會反擊,所以槍手 B 一定會勝出。

由此,我們可以提出了更加一般化的定理 1。

定理 1

當 n 人對決時,若除了槍手 X,其餘槍手選擇的策略皆為射擊 X 或不射擊,則此時 X 選擇不射,勝率為 0。

Proof:

由於其餘槍手選擇的策略皆為射擊 X 或不射擊,故經過一輪射擊後,可能的情形有 X 死和 X 活兩種情況。假設 X 選擇不射擊,其中 X 死了即無須討論,而若 X 活著,則由預備定理知: 下一輪時,槍手的組合不變,所以選擇的策略也不會改變,總有那麼一次 X 會被射死,故 X 的勝率為 0。

<u>延伸:</u> 當有許多種不同發展情形時,可藉由此定理判斷出某些勝率值。

(四) 幾何方式的思考:

我們將 $P_{\text{Awin}}, P_{\text{Bwin}}$ 當成 x 軸和 y 軸上移動的變量，並將每一次循環後的機率分布點，描繪於平面坐標系，形成勝率分布圖，展示了機率分布點隨時間(回合)的變化。由於最終狀態中，$P_{\text{Awin}} + P_{\text{Bwin}} = 1$，因此機率分布點會逐漸趨近於 $P_{\text{Awin}} + P_{\text{Bwin}} = 1$，我們可算出在第 n 輪後的機率分布

$$P_{\text{Awin}}(n) = a\sum_{i=0}^{n}(1-a)^i(1-b)^i$$

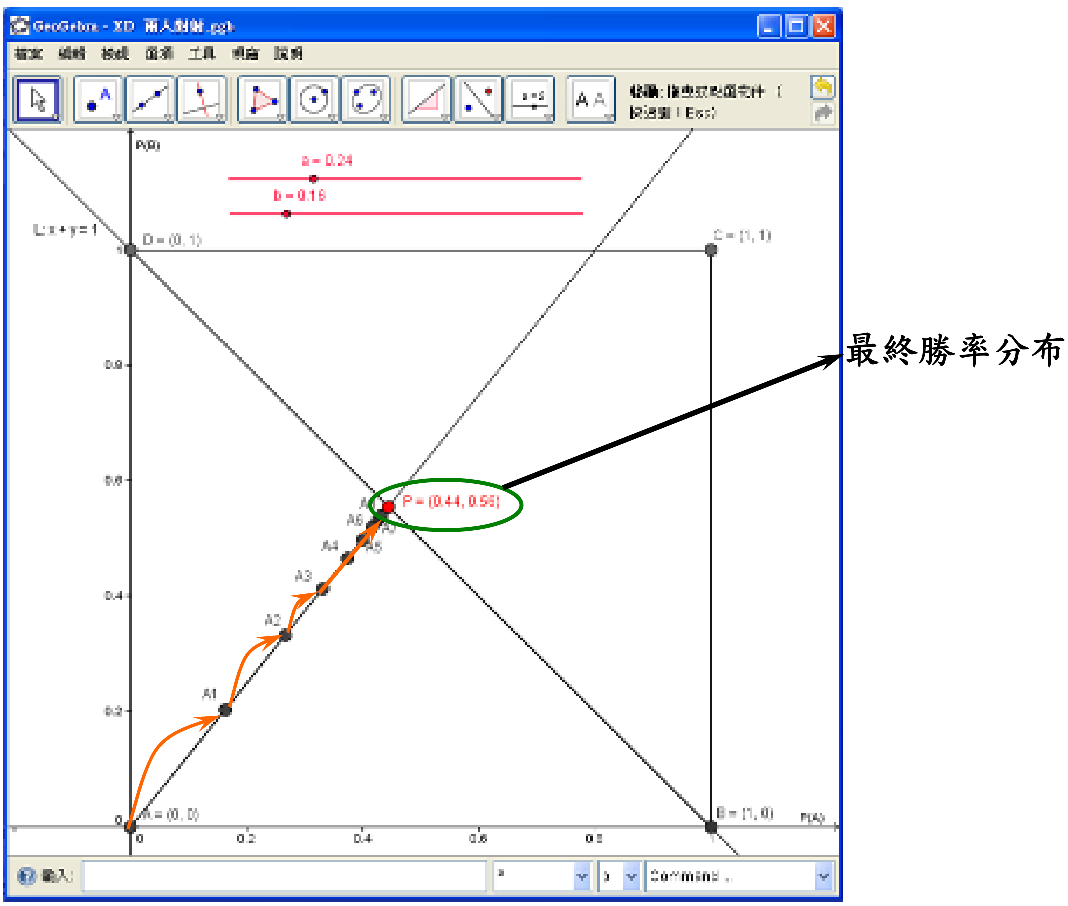
$$P_{\text{Bwin}}(n) = b(1-a)\sum_{i=0}^{n}(1-a)^i(1-b)^i$$

$$\frac{\Delta P_{\text{Awin}}}{\Delta n} = \frac{P_{\text{Awin}}(n+1) - P_{\text{Awin}}(n)}{(n+1)-n} = a(1-a)^n(1-b)^n$$

$$\frac{\Delta P_{\text{Bwin}}}{\Delta n} = \frac{P_{\text{Bwin}}(n+1) - P_{\text{Bwin}}(n)}{(n+1)-n} = b(1-a)(1-a)^n(1-b)^n$$

$$\frac{\dfrac{\Delta P_{\text{Bwin}}}{\Delta n}}{\dfrac{\Delta P_{\text{Awin}}}{\Delta n}} = \frac{b(1-a)}{a}$$

因此，機率分布點在坐標系中的軌跡會是一直線(斜率為 $\frac{b(1-a)}{a}$)，求出其與直線 L: $P_{\text{Awin}} + P_{\text{Bwin}} = 1$ 的交點即為**最終勝率分布**。以數學軟體 GeoGebra 展現如下:



(五) **射擊順序的影響:**

假設 A 現在要和一對手 X 對決，那麼 A 選擇先射和後射的勝率如下:

$$P_{Awin}\left(\text{先射}\right)=\frac{a}{1-(1-a)(1-x)}\cdots\cdots(1)$$

$$P_{Awin}\left(\text{後射}\right)=\frac{(1-x)a}{1-(1-a)(1-x)}\cdots\cdots(2)$$

其中(1) > (2)，由此我們得到以下結果:

當兩槍手對決時，若槍手 A 可以選擇先射或後射時，選擇先射擊的勝率會大於選擇後射擊的勝率。

以上討論完兩人對射的情形後，我們繼續進行三人槍手賽局的研究。

四、轉移矩陣說明:

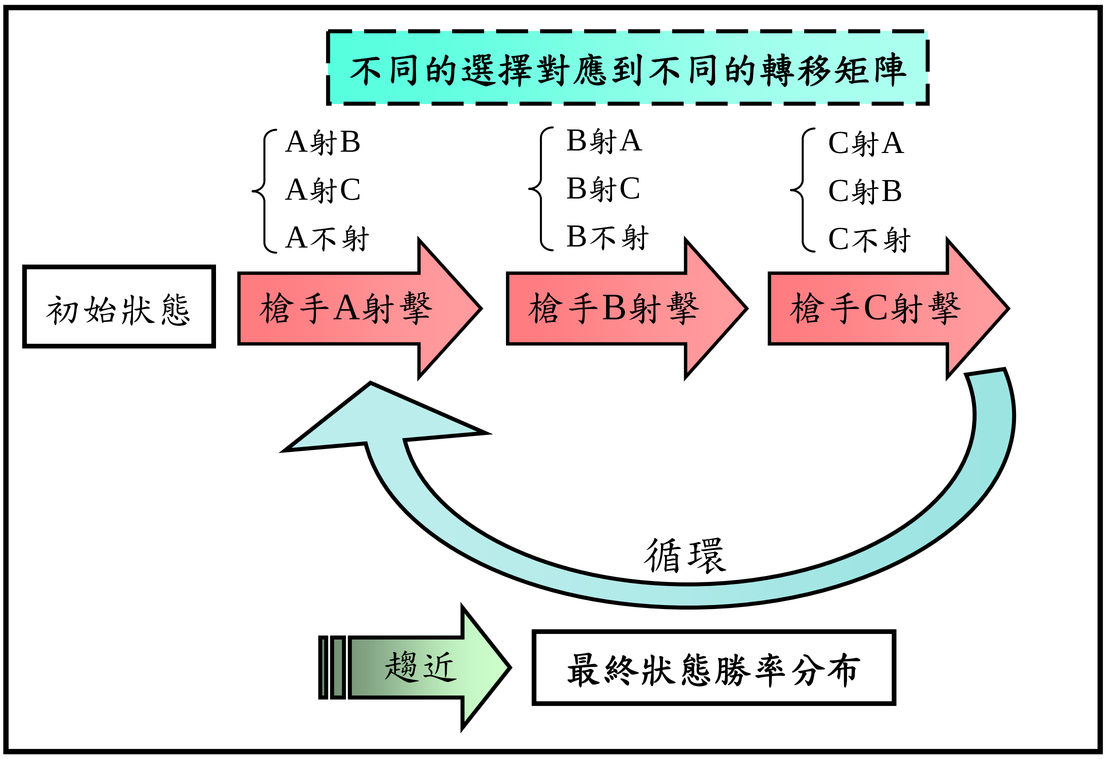
(一) 三人槍手賽局的樹狀圖:

我們同樣架構出三人對射的樹狀圖。(詳見附錄 3)

然而，如此的分析法若一一討論，會變得非常複雜且容易出錯，所以接下來我們用**吸收馬可夫鏈**(簡介參見附錄 1)的方法，藉由轉移矩陣的運算，簡化我們的討論。

(二) 三人槍手賽局流程:

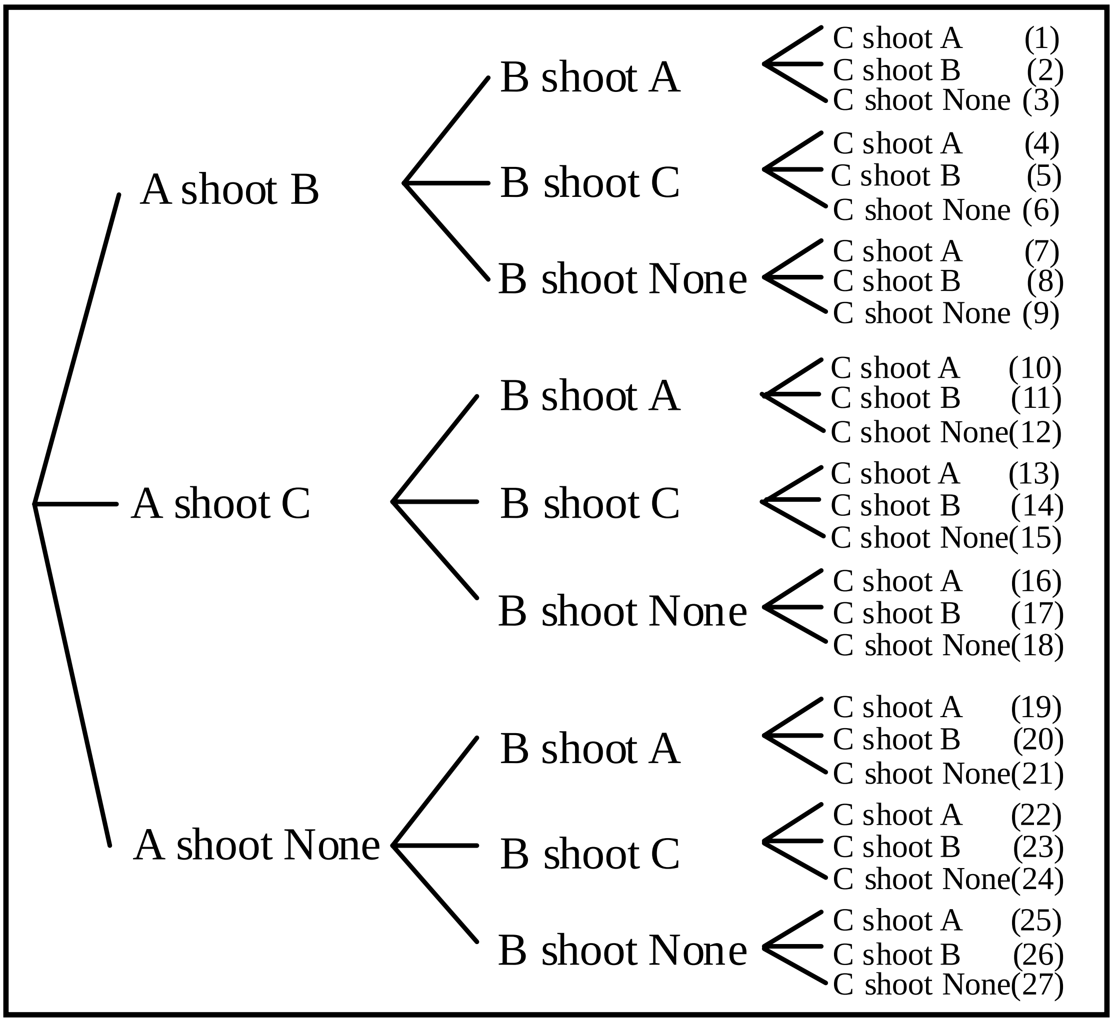
我們大致描述整個賽局的流程:



因此槍手 ABC 的決策各有三種，**排列後共有 27 種可能的策略組合**，為了方便討論所有可能的策略組合，我們依以下方式編號:

(1)	A 射 B、B 射 A、C 射 A	(15)	A 射 C、B 射 C、C 不射
(2)	A 射 B、B 射 A、C 射 B	(16)	A 射 C、B 不射、C 射 A
(3)	A 射 B、B 射 A、C 不射	(17)	A 射 C、B 不射、C 射 B
(4)	A 射 B、B 射 C、C 射 A	(18)	A 射 C、B 不射、C 不射
(5)	A 射 B、B 射 C、C 射 B	(19)	A 不射、B 射 A、C 射 A
(6)	A 射 B、B 射 C、C 不射	(20)	A 不射、B 射 A、C 射 B
(7)	A 射 B、B 不射、C 射 A	(21)	A 不射、B 射 A、C 不射
(8)	A 射 B、B 不射、C 射 B	(22)	A 不射、B 射 C、C 射 A
(9)	A 射 B、B 不射、C 不射	(23)	A 不射、B 射 C、C 射 B
(10)	A 射 C、B 射 A、C 射 A	(24)	A 不射、B 射 C、C 不射
(11)	A 射 C、B 射 A、C 射 B	(25)	A 不射、B 不射、C 射 A
(12)	A 射 C、B 射 A、C 不射	(26)	A 不射、B 不射、C 射 B
(13)	A 射 C、B 射 C、C 射 A	(27)	A 不射、B 不射、C 不射
(14)	A 射 C、B 射 C、C 射 B		

對照以下決策樹:



(三)槍手賽局中的轉移矩陣:

接著我們必須做出各種行動所對應到的轉移矩陣，我們舉A射B這個策略為例子。

1.轉移圖:

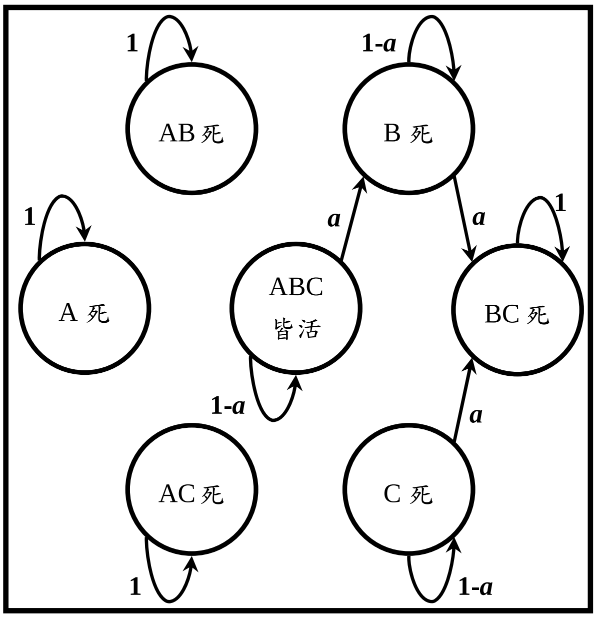


Fig. 4.3

2.轉移矩陣:

$$\underset{\text{A 射 B}}{M(A\times B)}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}\text{A}&\text{B}&\text{C}&\text{AB}&\text{BC}&\text{AC}&\text{ABC}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\a&0&0&1-a&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\a&0&0&0&0&1-a&0\\0&0&0&0&0&a&1-a\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\ \left.\begin{array}{l}\to \text{A alive}\\ \to \text{B alive}\\ \to \text{C alive}\end{array}\right\}\text{吸收狀態}\\ \to \text{AB alive}\\ \to \text{BC alive}\\ \to \text{CA alive}\\ \to \text{ABC alive}\end{array}$$

說明:

狀態 1, 2, 3 為吸收狀態，賽局已結束(轉移回原狀態)。

狀態 4, 6 為兩人槍手賽局，由前頁分析知最佳策略為射擊對方，因此有 a 的機率命中(轉移到狀態 1)，而有 $1-a$ 的機率沒射中(轉移回原狀態)。

狀態 5 中，槍手 A 已死亡，無法射擊 B (轉移回原狀態)。

狀態 7 中，槍手 A 選擇射擊 B，有 a 的機率命中(轉移到狀態 6)，而有 $1-a$ 的機率沒射中(轉移回原狀態)。

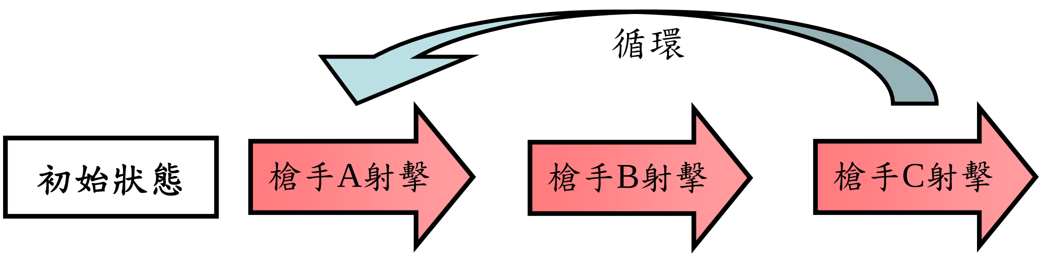
(四) 轉移矩陣表:

以此類推，我們可以推得所有不同行動所對應的轉移矩陣，整理如下表:

$M(A\times C)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\a&0&0&1-a&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\a&0&0&0&0&1-a&0\\0&0&0&a&0&0&1-a\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{A alive}\\\to \text{B alive}\\\to \text{C alive}\\\to \text{AB alive}\\\to \text{BC alive}\\\to \text{CA alive}\\\to \text{ABC alive}\end{array}$	$M(A\times \text{None})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\a&0&0&1-a&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\a&0&0&0&0&1-a&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{A alive}\\\to \text{B alive}\\\to \text{C alive}\\\to \text{AB alive}\\\to \text{BC alive}\\\to \text{CA alive}\\\to \text{ABC alive}\end{array}$
$M(B\times A)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&b&0&1-b&0&0&0\\0&b&0&0&1-b&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&b&0&1-b\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{A alive}\\\to \text{B alive}\\\to \text{C alive}\\\to \text{AB alive}\\\to \text{BC alive}\\\to \text{CA alive}\\\to \text{ABC alive}\end{array}$	$M(B\times C)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&b&0&1-b&0&0&0\\0&b&0&0&1-b&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&b&0&0&1-b\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{A alive}\\\to \text{B alive}\\\to \text{C alive}\\\to \text{AB alive}\\\to \text{BC alive}\\\to \text{CA alive}\\\to \text{ABC alive}\end{array}$
$M(B\times \text{None})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&b&0&1-b&0&0&0\\0&b&0&0&1-b&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{A alive}\\\to \text{B alive}\\\to \text{C alive}\\\to \text{AB alive}\\\to \text{BC alive}\\\to \text{CA alive}\\\to \text{ABC alive}\end{array}$	$M(C\times A)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&c&0&1-c&0&0\\0&0&c&0&0&1-c&0\\0&0&0&0&c&0&1-c\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{A alive}\\\to \text{B alive}\\\to \text{C alive}\\\to \text{AB alive}\\\to \text{BC alive}\\\to \text{CA alive}\\\to \text{ABC alive}\end{array}$
$M(C\times B)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&c&0&1-c&0&0\\0&0&c&0&0&1-c&0\\0&0&0&0&0&c&1-c\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{A alive}\\\to \text{B alive}\\\to \text{C alive}\\\to \text{AB alive}\\\to \text{BC alive}\\\to \text{CA alive}\\\to \text{ABC alive}\end{array}$	$M(C\times \text{None})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&c&0&1-c&0&0\\0&0&c&0&0&1-c&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{A alive}\\\to \text{B alive}\\\to \text{C alive}\\\to \text{AB alive}\\\to \text{BC alive}\\\to \text{CA alive}\\\to \text{ABC alive}\end{array}$

五、在三人槍手賽局中，槍手的最佳決策探討:

(一) 轉移矩陣的運用:



$$\underbrace{\overset{\text{A shoot B}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\a&0&0&1-a&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\a&0&0&0&0&1-a&0\\0&0&0&0&0&a&1-a\end{bmatrix}}\times\overset{\text{B shoot A}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&b&0&1-b&0&0&0\\0&b&0&0&1-b&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&b&0&1-b\end{bmatrix}}\times\overset{\text{C shoot A}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&c&0&1-c&0&0\\0&0&c&0&0&1-c&0\\0&0&0&0&c&0&1-c\end{bmatrix}}}_{\text{一次運算}}$$

於是我們就將一次次的決策，轉換為一個個的矩陣乘法，其中藉由數學軟體 WxMaxima 進行矩陣的運算。因此，最終勝率分布矩陣(M_{Final})便可經由以下方式計算出: M_{Start} 為初始矩陣(所有槍手都活著)

$$M_{Final} = \lim_{n\to\infty}\Big(M(C決策)\times M(B決策)\times M(A決策)\Big)^{n}\times M_{Start}$$

(二) 研究方法:

接著我們便能開始討論三人對射的情形。首先，我們必須依序找出槍手 C, B, A 的最佳策略，再解出槍手們的勝率函數。以下是我們的研究步驟:

Step1 **找出已知槍手 A, B 的策略時，C 的最佳策略。**

Step2 **找出已知槍手 A 的策略時，B 的最佳策略。**

Step3 **找出 A 的最佳策略，建構三人槍手賽局的全決策盒。**

Step4 **計算槍手們的勝率一般式。**

Step1 找出已知 A, B 的策略時，C 的最佳策略:

1.研究方法:

由於 A,B 的策略組合共有九組如下表，我們舉 A 射 B、B 射 A 為例說明。

A 射 B、B 射 A	A 射 C、B 射 A	A 不射、B 射 A
A 射 B、B 射 C	A 射 C、B 射 C	A 不射、B 射 C
A 射 B、B 不射	A 射 C、B 不射	A 不射、B 不射

例子:

當已知槍手 A, B 的策略組合為 A 射 B 及 B 射 A 時，槍手 C 可以選擇策略(1)或(2)或(3)，分別代表著 C 射 A、C 射 B 及 C 不射三種策略。藉由轉移矩陣的運算，我們能計算出 C 選擇策略(1)或(2)或(3)的勝率如下:

$$P_{Cwin}(1) = \frac{c\left(a^2b^2c^2-2ab^2c^2+b^2c^2-2a^2bc^2+4abc^2-2bc^2+a^2c^2-2ac^2+c^2-a^2b^2c+ab^2c+3a^2bc-5abc+bc-a^2c+2ac-a^2b+2ab\right)}{\left(1\text{-}(1\text{-}a)(1-c)\right)\left(1-(1-b)(1-c)\right)\left(1-(1-a)(1-b)(1-c)\right)}$$

$$P_{Cwin}(2) = \frac{c\left(a^2b^2c^2-2ab^2c^2+b^2c^2-2a^2bc^2+4abc^2-2bc^2+a^2c^2-2ac^2+c^2-a^2b^2c+2ab^2c-b^2c+2a^2bc-5abc+2bc+ac-a^2b+2ab\right)}{\left(1\text{-}(1\text{-}a)(1-c)\right)\left(1-(1-b)(1-c)\right)\left(1-(1-a)(1-b)(1-c)\right)}$$

$$P_{Cwin}(3) = \frac{-c\left(a^2bc-3abc+bc+ac-a^2b+2ab\right)}{\left(1\text{-}(1\text{-}a)(1-c)\right)\left(1-(1-b)(1-c)\right)\left(1-(1-a)(1-b)\right)}$$

接著我們要比較 $P_{Cwin}(1)$, $P_{Cwin}(2)$及 $P_{Cwin}(3)$值的大小，因此我們將式子兩兩相減，找出各種勝率大小關係的充要條件:

由 $P_{Cwin}(1) - P_{Cwin}(2) = \dfrac{-(1\text{-}a)(1-b)(b-a)c^2}{(1-(1-a)(1-c))(1-(1-b)(1-c))(1-(1-a)(1-b)(1-c))}$

知 $P_{Cwin}(1) > P_{Cwin}(2) \iff a > b$

$P_{Cwin}(1) < P_{Cwin}(2) \iff a < b$

由 $P_{Cwin}(2) - P_{Cwin}(3) = \dfrac{-(1\text{-}a)(1-b)\left(a^2b^2c-2ab^2c+b^2c-a^2bc+a^2c-a^2b^2+2ab^2-b^2+ab\right)c^2}{(1-(1-a)(1-b))(1-(1-a)(1-c))(1-(1-b)(1-c))(1-(1-a)(1-b)(1-c))}$

知 $P_{Cwin}(2) > P_{Cwin}(3) \iff c < \dfrac{(1-a)^2 b^2 - ab}{(1-a)^2 b^2 + a^2(1-b)}$

$P_{Cwin}(2) < P_{Cwin}(3) \iff c > \dfrac{(1-a)^2 b^2 - ab}{(1-a)^2 b^2 + a^2(1-b)}$

由 $P_{Cwin}(3) - P_{Cwin}(1) = \dfrac{c^2(1-a)(1-b)\left(a^2b^2c-2ab^2c+b^2c-a^2bc+a^2c-a^2b^2+ab^2+a^2b+ab-a^2\right)}{(1-(1-a)(1-b))(1-(1-b)(1-c))(1-(1-c)(1-a))(1-(1-a)(1-b)(1-c))}$

知 $P_{Cwin}(3) > P_{Cwin}(1) \iff c < \dfrac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2 b^2 + a^2(1-b)}$

$P_{Cwin}(3) < P_{Cwin}(1) \iff c > \dfrac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2 b^2 + a^2(1-b)}$

藉由以上討論方式，我們可以找出各種勝率大小關係的充要條件，然而我們不清楚這些式子間是否有任何關係，造成不必要的結論，我們舉個例子:

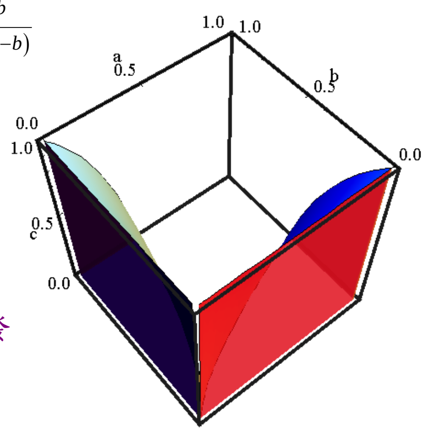
當 $P_{Cwin}(1) > P_{Cwin}(2) > P_{Cwin}(3)$發生時

$$a > b \wedge c > \frac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2 b^2+a^2(1-b)} \wedge c < \frac{(1-a)^2 b^2-ab}{(1-a)^2 b^2+a^2(1-b)}$$

然而這種情形可能發生嗎?

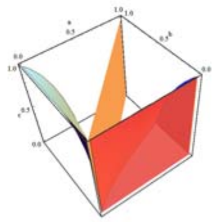
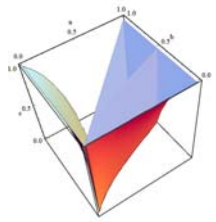
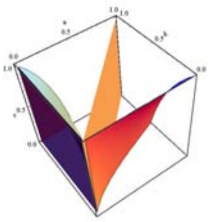
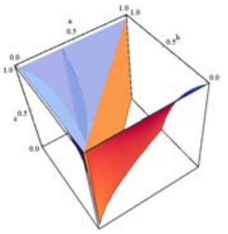
將 $c > \dfrac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2 b^2+a^2(1-b)}$ 及 $c < \dfrac{(1-a)^2 b^2-ab}{(1-a)^2 b^2+a^2(1-b)}$

這兩條不等式所代表的區域繪於三維空間中(如右圖)，便可發現兩式是不可能同時發生在可行解區(圖中之立方體)。



因此，我們藉由數學軟體 *Mathematica* 8.0 將這些決策臨界面描繪在三維座標系中觀察切割出的區域。其中槍手命中率 a, b, c 被視為空間坐標系中，分別在 x 軸、y 軸及 z 軸上移動的變量，故**可行解區**為 $\{(a,b,c) \mid 0 < a,b,c \le 1\}$ ，即圖中稜長為 1 之**立方體**。

其結果整理如下:

命中率的範圍	$a > b$		$a < b$	
	$c < \frac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$	$c > \frac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$	$c < \frac{(1-a)^2b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$	$c > \frac{(1-a)^2b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$
命中率範圍的對應圖形				
槍手 C 的最佳策略	**策略(3): C 不射**	**策略(1): C 射 A**	**策略(2): C 射 B**	**策略(3): C 不射**

然而，由圖形所觀察到的圖形並非完全正確，因此我們尚須以代數的方式檢驗，以防繪圖時的誤差影響到圖形的判讀。

2.結果(文字版，圖形版參見「附錄 4」)**:**

我們先定義一些變數 a, b, c 的函數以利後頭討論:

$$f_1 \equiv a-b \qquad f_2 \equiv b-\frac{a^2}{\bar{a}^2} \qquad f_3 \equiv c-\frac{a^2\bar{b}^2-ab^2}{a^2\bar{b}-b\bar{a}^2\bar{b}}$$

$$f_4 \equiv c-\frac{\bar{a}^2b^2-ab}{\bar{a}^2b^2+a^2\bar{b}} \qquad f_5 \equiv c-\frac{a^2\bar{b}-a\bar{a}b^2-ab}{\bar{a}^2b^2+a^2\bar{b}} \qquad f_6 \equiv c-\frac{a\bar{b}-b}{a\bar{b}}$$

為了繼續進行 *Step2*，我們先將全部可能策略組合，依槍手 A 的策略分為(1)~(9), (10)~(18)及(19)~(27)三組，整理在不同命中率範圍下，已知槍手 A, B 策略組合時，對應到槍手 C 的最佳策略，整理如下:

2.1　A 射 B (策略(1)~(9)):

命中率範圍	B 射 A	B 射 C	B 不射
$f_2<0 \wedge f_5<0$	策略(3) - C 不射	策略(6) - C 不射	策略(9) - C 不射
$f_2>0 \wedge f_5<0$	策略(3) - C 不射	策略(4) - C 射 A	策略(9) - C 不射
$f_2<0 \wedge f_5>0 \wedge f_6<0$	策略(1) - C 射 A	策略(6) - C 不射	策略(9) - C 不射
$f_2>0 \wedge f_5>0 \wedge f_6<0$	策略(1) - C 射 A	策略(4) - C 射 A	策略(9) - C 不射
$f_1>0 \wedge f_2>0 \wedge f_6>0$	策略(1) - C 射 A	策略(4) - C 射 A	策略(7) - C 射 A
$f_2<0 \wedge f_3<0 \wedge f_6>0$	策略(1) - C 射 A	策略(6) - C 不射	策略(7) - C 射 A
$f_1>0 \wedge f_2<0 \wedge f_5>0$	策略(1) - C 射 A	策略(6) - C 不射	策略(7) - C 射 A
$f_1<0 \wedge f_2>0 \wedge$ $f_3>0 \wedge f_4>0$	策略(3) - C 不射	策略(5) - C 射 B	策略(9) - C 射 A
$f_3>0 \wedge f_4<0$	策略(2) - C 射 B	策略(5) - C 射 B	策略(9) - C 射 A
$f_3<0 \wedge f_4<0$	策略(2) - C 射 B	策略(5) - C 射 B	策略(9) - C 射 A
$f_2>0 \wedge f_3<0 \wedge f_5>0$	策略(3) - C 不射	策略(5) - C 射 B	策略(9) - C 射 A
$f_1<0 \wedge f_2<0$	策略(3) - C 不射	策略(6) - C 不射	策略(9) - C 射 A

2.2 A 射 C (策略(10)~(18)):

命中率範圍	B 射 A	B 射 C	B 不射
$\frac{b}{b^2-b+1}<a$	策略(10) - C 射 A	策略(13) - C 射 A	策略(16) - C 射 A
$b<a<\frac{b}{b^2-b+1}$	策略(12) - C 不射	策略(13) - C 射 A	策略(16) - C 射 A
$a<b$	策略(10) - C 射 A	策略(14) - C 射 B	策略(17) - C 射 B

2.3 A 不射 (策略(19)~(27)):

命中率範圍	B 射 A	B 射 C	B 不射
$a>b$	策略(21) - C 不射	策略(22) - C 射 A	策略(25) - C 射 A
$a<b<\frac{a}{(1-a)(1-c)}$	策略(21) - C 不射	策略(23) - C 射 B	策略(26) - C 射 B
$b>\frac{a}{(1-a)(1-c)}$	策略(20) - C 射 B	策略(23) - C 射 B	策略(26) - C 射 B

Step2 找出已知 A 的策略時，B 的最佳策略:

1.研究方法:

A 的策略有 A 射 B、A 射 C 及 A 不射三種，仿照 *Step1* 的研究方法，B 可以選擇射 A、射 C 或不射。藉由轉移矩陣的運算，分別計算出 B 選擇三種策略的勝率(須利用 *Step1* 之結果)，兩兩相減比較其值，找出勝率大小關係的充要條件。最後用三維決策盒的方式，呈現不同範圍下的命中率所對應到 B 的最佳策略。

2.結果(文字版，圖形版參見「附錄 5」):

2.1 A 射 B (策略(1)~(9)): (函數 $f_1 \sim f_{37}$ 的定義及圖形參見附錄 3)

命中率範圍		B, C 的最佳策略
$f_2<0 \wedge f_5<0$		策略(3) - B 射 A, C 不射
$f_2>0 \wedge f_5<0$		策略(1) - B 射 A, C 射 A
$f_2<0 \wedge f_5>0 \wedge f_6<0$	$f_7>0$	策略(4) - B 射 C, C 射 A
	$f_7<0$	策略(3) - B 射 A, C 不射
$f_2>0 \wedge f_5>0 \wedge f_6<0$	$f_8>0$	策略(4) - B 射 C, C 射 A
	$f_8<0$	策略(1) - B 射 A, C 射 A
$f_1>0 \wedge f_2>0 \wedge f_6>0$	$f_8<0$	策略(4) - B 射 C, C 射 A
	$f_8>0$	策略(1) - B 射 A, C 射 A
$f_2<0 \wedge f_3<0 \wedge f_6>0$	$f_7>0 \wedge f_{27}<0$	策略(4) - B 射 C, C 射 A
	$f_7<0 \wedge f_{10}>0$	策略(3) - B 射 A, C 不射
	$f_{10}<0 \wedge f_{27}>0$	策略(7) - B 不射, C 射 A

$f_1 > 0 \wedge f_3 > 0$	$f_9 < 0 \wedge f_{27} > 0$	策略(7) - B 不射, C 射 A
	$f_8 > 0 \wedge f_9 > 0$	策略(1) - B 射 A, C 射 A
$f_1 < 0 \wedge f_2 > 0 \wedge f_3 > 0 \wedge f_4 > 0$	$f_{11} > 0$	策略(6) - B 射 C, C 不射
	$f_{11} < 0$	策略(2) - B 射 A, C 射 B
$f_3 > 0 \wedge f_4 < 0$	$f_8 > 0$	策略(2) - B 射 A, C 射 B
	$f_8 < 0$	策略(5) - B 射 C, C 射 B
$f_3 < 0 \wedge f_4 < 0$	$f_8 > 0$	策略(2) - B 射 A, C 射 B
	$f_8 < 0$	策略(5) - B 射 C, C 射 B
$f_2 > 0 \wedge f_3 < 0 \wedge f_4 > 0$	$f_{11} > 0$	策略(6) - B 射 C, C 不射
	$f_{11} < 0$	策略(2) - B 射 A, C 射 B
$f_1 < 0 \wedge f_2 < 0$	$f_8 > 0$	策略(3) - B 射 A, C 不射
	$f_8 < 0$	策略(6) - B 射 C, C 不射

2.2 A 射 C (策略(10)~(18)):

命中率範圍		B, C 的最佳策略
$f_{12} > 0$	$f_{13} < 0$	策略(13) - B 射 C, C 射 A
	$f_{13} > 0 \wedge f_{14} > 0$	策略(16) - B 不射, C 射 A
	$f_{14} < 0$	策略(10) - B 射 A, C 射 A
$f_1 > 0 \wedge f_{12} < 0$	$f_{13} > 0 \wedge f_{16} > 0$	策略(16) - B 不射, C 射 A
	$f_{16} < 0 \wedge f_{15} > 0$	策略(12) - B 射 A, C 不射
	$f_{15} < 0 \wedge f_{13} < 0$	策略(13) - B 射 C, C 射 A
$f_1 < 0$	$f_{18} > 0$	策略(12) - B 射 A, C 不射
	$f_{18} < 0$	策略(14) - B 射 C, C 射 B

2.3 A 不射 (策略(19)~(27)):

命中率範圍		B, C 的最佳策略
$f_1 > 0$	$f_{20} > 0$	策略(22) - B 射 C, C 射 A
	$f_{20} < 0$	策略(25) - B 不射, C 射 A
$f_1 < 0 \wedge f_{23} < 0$	$f_{20} > 0$	策略(21) - B 射 A, C 不射
	$f_{20} < 0$	策略(23) - B 射 C, C 射 B
$f_{23} > 0$	$f_8 > 0$	策略(20) - B 射 A, C 射 B
	$f_8 < 0$	策略(23) - B 射 C, C 射 B

Step3 找出 A 的最佳策略:

1.研究方法:

我們藉由轉移矩陣的運算，分別計算出 A 選擇三種策略的勝率(須利用 *Step1,2* 之結果)，兩兩相減比較其值，找出勝率大小關係的充要條件。最後建構三人槍手賽局的全決策盒，呈現不同範圍下的命中率所對應到槍手們的最佳策略組合。

2.結果(文字版，圖形版參見「研究結果四」):

命中率範圍		A, B, C 的最佳策略組
2.1 $f_2<0 \wedge f_5<0$		
$f_{13}<0$		策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
$f_{13}>0 \wedge f_{20}>0$		策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{20}<0 \wedge f_{14}>0$	$f_{21}>0$	策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
	$f_{21}<0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{14}<0$	$f_{22}>0$	策略(10): A 射 C, B 射 A, C 射 A
	$f_{22}<0$	策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射
2.2 $f_2>0 \wedge f_5<0$		
$f_{13}<0$		策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
$f_{13}>0 \wedge f_{20}>0$		策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{20}<0 \wedge f_{14}>0$		策略(14): A 射 C, B 射 C, C 射 B
$f_{14}<0$	$f_{21}>0$	策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
	$f_{21}<0$	策略(10): A 射 C, B 射 A, C 射 A
2.3 $f_2<0 \wedge f_5>0 \wedge f_6<0$		
$f_{13}<0$		策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
$f_{13}>0 \wedge f_{20}>0$		策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{20}<0 \wedge f_{14}>0 \wedge f_7>0$	$f_{37}>0$	策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
	$f_{37}<0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{14}<0 \wedge f_7>0$		策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
$f_{14}>0 \wedge f_7<0$		策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射
$f_{14}<0 \wedge f_7<0$		策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射
2.4 $f_2>0 \wedge f_5>0 \wedge f_6<0$		
$f_{13}<0$		策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
$f_{13}>0 \wedge f_{20}>0$	$f_{37}>0$	策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
	$f_{37}<0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{20}<0 \wedge f_8<0$	$f_{37}>0$	策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
	$f_{37}<0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{14}>0 \wedge f_8>0$		策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{14}<0$		策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A

2.5 $f_1 > 0 \wedge f_2 > 0 \wedge f_6 > 0$		
$f_{13} < 0$	$f_{24} > 0$	策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
	$f_{24} < 0$	策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
$f_{13} > 0 \wedge f_{20} > 0$	$f_{37} > 0 \wedge f_{24} < 0 \wedge f_{25} < 0$	策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
	$f_{37} > 0 \wedge f_{24} < 0 \wedge f_{25} > 0$	策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
	$f_{37} < 0 \wedge f_{24} < 0 \wedge f_{25} > 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
	$f_{37} < 0 \wedge f_{24} > 0 \wedge f_{25} > 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
	$f_{37} < 0 \wedge f_{24} > 0 \wedge f_{25} < 0$	策略(22): A 不射, B 射 C, C 射 A
	$f_{37} > 0 \wedge f_{24} > 0 \wedge f_{25} < 0$	策略(22): A 不射, B 射 C, C 射 A
$f_{20} < 0 \wedge f_8 < 0$	$f_{37} > 0$	策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
	$f_{37} < 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{14} > 0 \wedge f_8 > 0$	$f_{26} > 0$	策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A
	$f_{26} < 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{14} < 0$		策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A

2.6 $f_2 < 0 \wedge f_3 < 0 \wedge f_6 > 0$		
$f_{13} < 0 \wedge f_{12} > 0$	$f_{24} > 0$	策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
	$f_{24} < 0$	策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
$f_{13} > 0 \wedge f_{20} > 0$	$f_{25} < 0$	策略(22): A 不射, B 射 C, C 射 A
	$f_{25} > 0 \wedge f_{24} > 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
	$f_{24} < 0$	策略(16): A 射 C, B 不射 C 射 A
$f_{14} > 0 \wedge f_{20} < 0 \wedge f_{27} < 0 \wedge f_7 > 0$	$f_{37} > 0$	策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
	$f_{37} < 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{10} < 0 \wedge f_{27} > 0$	$f_{21} > 0$	策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A
	$f_{21} < 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_7 > 0 \wedge f_{14} < 0$		策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A
$f_7 < 0 \wedge f_{10} > 0 \wedge f_{14} > 0$		策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射
$f_7 < 0 \wedge f_{14} < 0$		策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射
$f_{12} < 0 \wedge f_{13} < 0$		策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
$f_{12} < 0 \wedge f_{13} > 0 \wedge f_{20} > 0$		策略(22): A 不射, B 射 C, C 射 A
$f_{12} < 0 \wedge f_{20} < 0 \wedge f_{27} < 0 \wedge f_7 > 0$		策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射
$f_{12} < 0 \wedge f_{27} > 0 \wedge f_{10} < 0$	$f_{21} > 0$	策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A
	$f_{21} < 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{12} < 0 \wedge f_7 < 0 \wedge f_{10} > 0$		策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射

2.7 $f_1 > 0 \wedge f_3 > 0$		
$f_{12} > 0 \wedge f_9 < 0$	$f_{21} > 0$	策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A
	$f_{21} < 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{12} > 0 \wedge f_9 > 0 \wedge f_{14} > 0$	$f_{26} > 0$	策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A
	$f_{26} < 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{12} > 0 \wedge f_{14} < 0$		策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A
$f_{12} < 0 \wedge f_{15} < 0 \wedge f_9 > 0$		策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{12} < 0 \wedge f_{16} < 0$		策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A
$f_{12} < 0 \wedge f_{15} < 0 \wedge f_9 < 0$	$f_{21} > 0$	策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A
	$f_{21} < 0$	策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A
$f_{12} < 0 \wedge f_{15} > 0 \wedge f_9 < 0$	$f_{36} > 0$	策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A
	$f_{36} < 0$	策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
$f_{12} < 0 \wedge f_{15} > 0 \wedge f_9 > 0 \wedge f_{16} > 0$	$f_{35} > 0$	策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A
	$f_{35} < 0$	策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A
2.8 $f_1 < 0 \wedge f_2 > 0 \wedge f_3 > 0 \wedge f_4 > 0$		
$f_{20} > 0 \wedge f_{18} > 0$		策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射
$f_{20} < 0 \wedge f_{18} < 0 \wedge f_{11} > 0$		策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
$f_{20} < 0 \wedge f_{18} > 0 \wedge f_{11} > 0$	$f_{28} > 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
	$f_{28} < 0$	策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射
$f_{20} > 0 \wedge f_{18} < 0$	$f_{29} > 0$	策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射
	$f_{29} < 0$	策略(14): A 射 C, B 射 C, C 射 B
$f_{11} < 0$		策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
2.9 $f_3 > 0 \wedge f_4 < 0$		
$f_8 < 0 \wedge f_{18} < 0$	$f_{30} < 0$	策略(14): A 射 C, B 射 C, C 射 B
	$f_{30} > 0 \wedge f_{21} < 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
	$f_{21} > 0 \wedge f_{31} > 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
	$f_{31} < 0$	策略(5): A 射 B, B 射 C, C 射 B
$f_8 < 0 \wedge f_{18} > 0$	$f_{33} < 0$	策略(12): A 射 C, B 射 A, C 不射
	$f_{33} > 0 \wedge f_{32} > 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
	$f_{32} < 0 \wedge f_{31} > 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
	$f_{31} < 0$	策略(5): A 射 B, B 射 C, C 射 B
$f_8 > 0$	$f_{34} > 0$	策略(2): A 射 B, B 射 A, C 射 B
	$f_{34} < 0$	策略(2): A 射 B, B 射 A, C 射 B
2.10 $f_3 < 0 \wedge f_4 < 0$		
$f_8 < 0 \wedge f_{18} < 0$		策略(23): A 不射,B 射 C, C 射 B
$f_8 < 0 \wedge f_{18} > 0$		策略(23): A 不射,B 射 C, C 射 B
$f_8 > 0$	$f_{34} > 0$	策略(5): A 射 B, B 射 C, C 射 B
	$f_{34} < 0$	策略(5): A 射 B, B 射 C, C 射 B

2.11 $f_2 > 0 \wedge f_3 < 0 \wedge f_4 > 0$		
$f_{18} < 0$	$f_{29} < 0 \wedge f_{28} > 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
	$f_{29} > 0 \wedge f_{28} > 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
	$f_{29} > 0 \wedge f_{28} < 0$	策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射
$f_{11} > 0 \wedge f_{18} > 0 \wedge f_{23} < 0$	$f_{28} > 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
	$f_{28} < 0$	策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射
$f_8 < 0 \wedge f_{18} > 0 \wedge f_{23} > 0$		策略(23): A 不射,B 射 C, C 射 B
$f_8 > 0 \wedge f_{11} > 0 \wedge f_{23} > 0$		策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射
$f_{11} < 0 \wedge f_{23} < 0$		策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
2.12 $f_1 < 0 \wedge f_2 < 0$		
$f_{18} < 0$	$f_{29} > 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
	$f_{29} < 0$	策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
$f_8 < 0 \wedge f_{18} > 0$		策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B
$f_8 > 0 \wedge f_{18} > 0$		策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B

***Step4*　計算槍手們的勝率一般式:**

依據 *Step*1,2,3，我們將各策略組合下，三槍手的勝率一般式收錄於附錄 6。

(三) 延伸討論:

到此，我們已經建構出三人槍手賽局的全決策盒，而我們想問:

當任意三人對決時，最容易出現哪一個最佳策略組合呢?

由於策略**所占區域體積**代表了**該策略成為最佳策略的機率**，整理如下表:

策略編碼	所占區域體積 (成為最佳策略的機率)	策略編碼	所占區域體積 (成為最佳策略的機率)
策略(1)	**0.05**7119224638361	策略(10)	**0.02**3719739041486
策略(2)	**0.01**6487942215704	策略(12)	**0.00**1522864257022
策略(3)	**0.05**7440764008768	策略(13)	**0.07**6956343929858
策略(4)	**0.03**2149623412009	策略(14)	**0.02**3345313667146
策略(5)	**0.04**5052403613979	策略(16)	**0.27**8914742533626
策略(6)	**0.04**7367967955782	策略(22)	**0.00**0653031303548
策略(7)	**0.01**8118813557110	策略(23)	**0.36**8526397205173

我們可以發現**策略(23)** - A 不射、B 射 C、C 射 B，是最容易出現的最佳策略組合。第二則是**策略(16)** -A 射 C, B 不射, C 射 A。**真是令人意外的結果呀!**

陸、研究結果

一、在兩人槍手賽局中，選擇射擊的勝率較不射擊的勝率大。而此時當兩槍手為 **A, B** 時(**A** 先射擊)，兩人勝率如下:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Awin}} = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} \qquad \mathbf{P}_{\mathbf{Bwin}} = \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)}$$

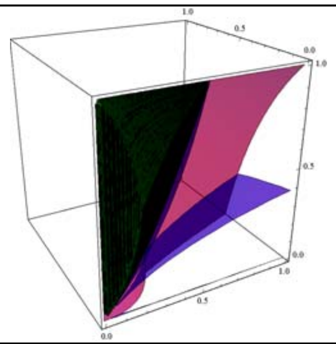
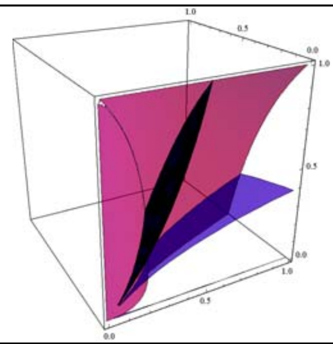
二、在兩人槍手賽局中，假設槍手可以選擇射擊順序時，則選擇先射的勝率較選擇後射的勝率大。此時當槍手 **A** 遇上任意對手 **X** 時，其勝率如下:

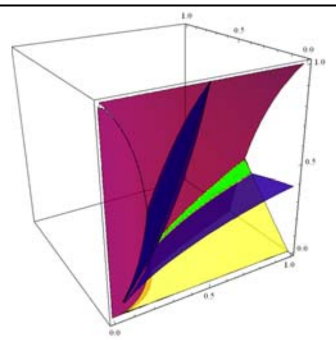
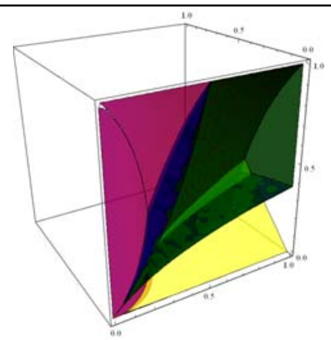
$$\mathbf{P}_{\mathbf{Awin}}(\text{A先射}) = \frac{a}{1-(1-a)(1-x)} > \mathbf{P}_{\mathbf{Awin}}(\text{A後射}) = \frac{(1-x)a}{1-(1-a)(1-x)}$$

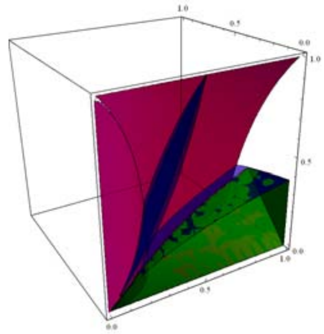
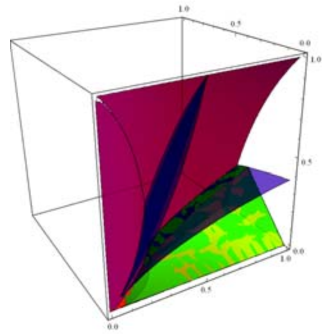
三、三人對射時，在不同命中率的條件下，槍手們會有不同的最佳策略(策略(8),(9),(11),(15), (17)~(21),(24)~(27)不可能)，因此沒有固定的選擇。

四、三人對射時，槍手 **A, B, C** 在不同命中率條件下的最佳策略組合:

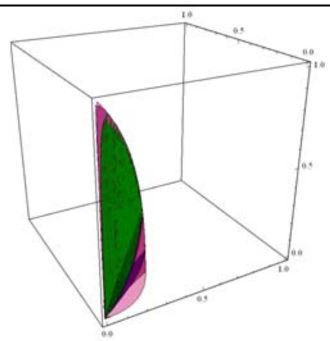
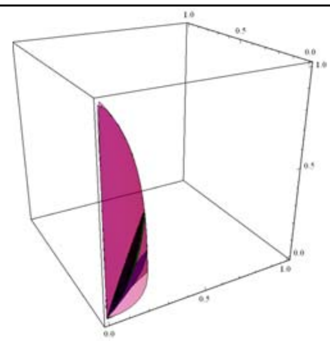
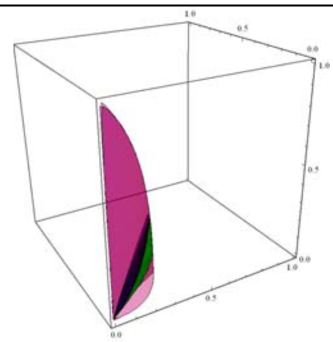
1. $f_2 < 0 \wedge f_5 < 0$:

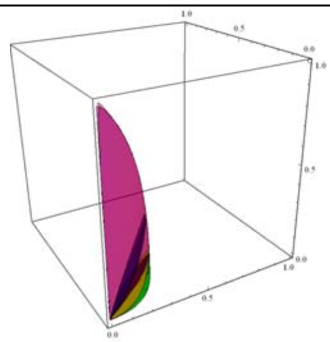
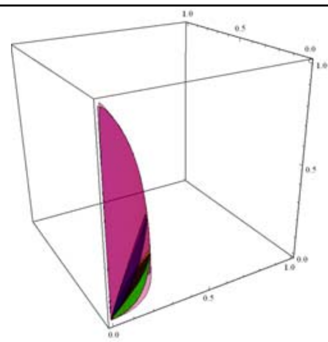
命中率的範圍	1.1 $f_{13} < 0$	1.2 $f_{13} > 0 \wedge f_{20} > 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

命中率的範圍	1.3 $f_{20} < 0 \wedge f_{14} > 0$	
	$f_{21} > 0$	$f_{21} < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

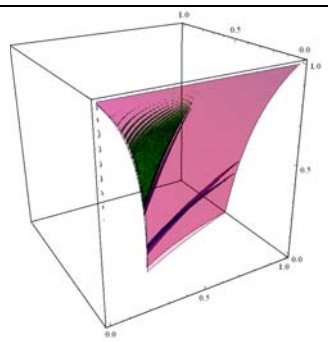
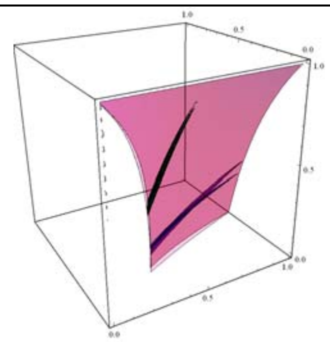
命中率的範圍	<u>1.4</u> $f_{14} < 0$	
	$f_{22} > 0$	$f_{22} < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(10): A 射 C, B 射 A, C 射 A**	**策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射**

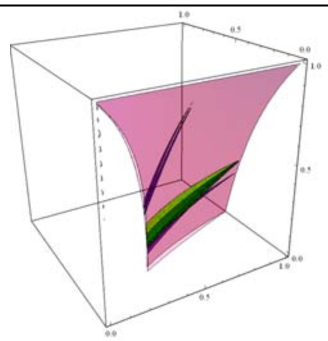
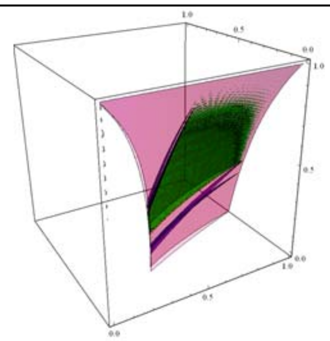
2. $f_2 > 0 \wedge f_5 < 0$:

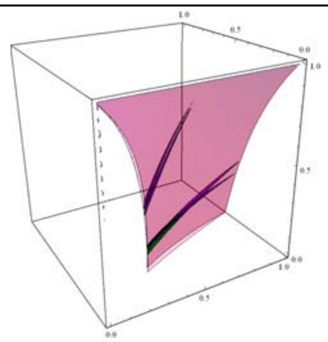
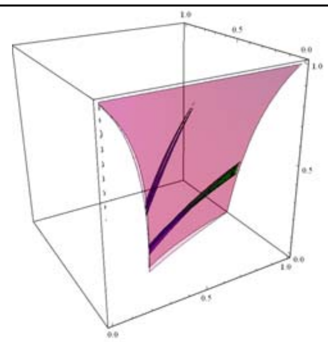
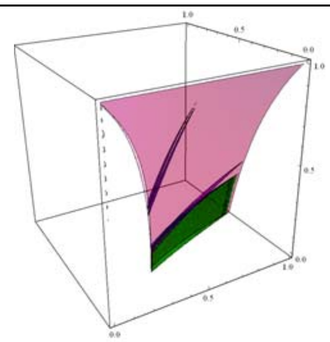
命中率的範圍	<u>2.1</u> $f_{13} < 0$	<u>2.2</u> $f_{13} > 0 \wedge f_{20} > 0$	<u>2.3</u> $f_{20} < 0 \wedge f_{14} > 0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**	**策略(14): A 射 C, B 射 C, C 射 B**

命中率的範圍	<u>2.4</u> $f_{14}<0$	
	$f_{21} > 0$	$f_{21} < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A**	**策略(10): A 射 C, B 射 A, C 射 A**

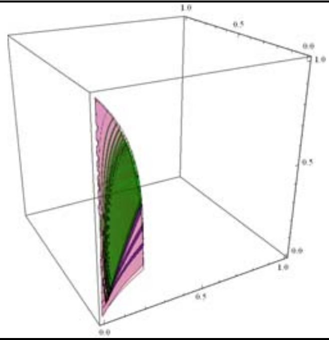
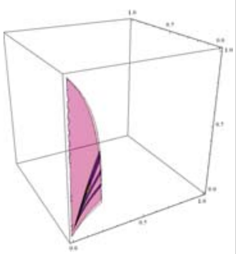
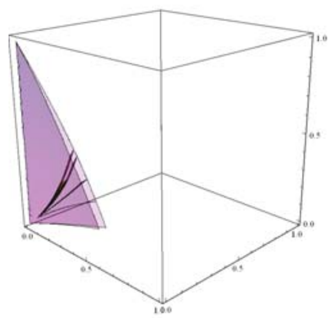
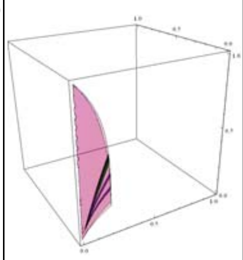
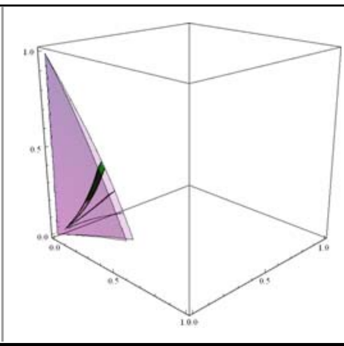
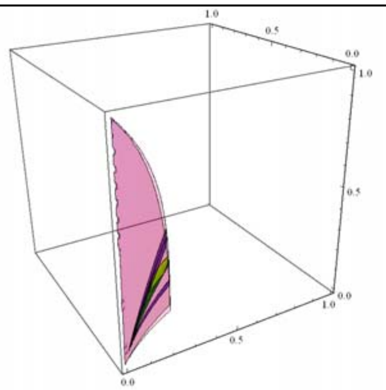
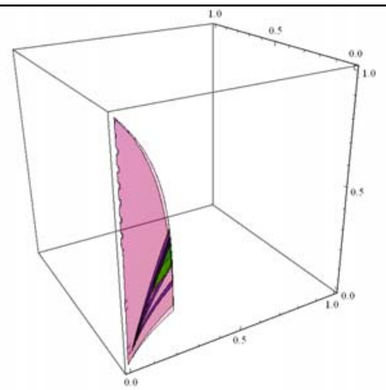
3. $f_2 < 0 \wedge f_5 > 0 \wedge f_6 < 0$：

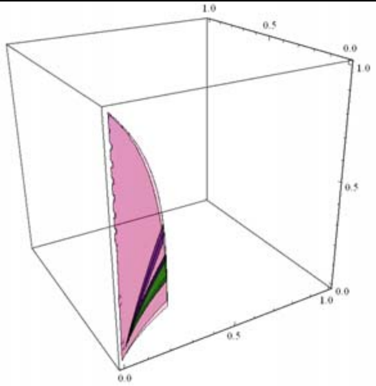
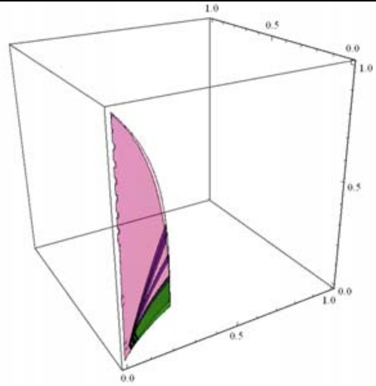
命中率的範圍	3.1 $f_{13} < 0$	3.2 $f_{13} > 0 \wedge f_{20} > 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

命中率的範圍	3.3 $f_{20} < 0 \wedge f_{14} > 0 \wedge f_7 > 0$	
	$f_{37} > 0$	$f_{37} < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

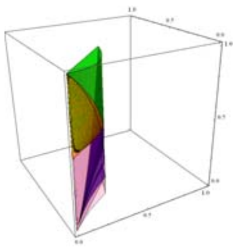
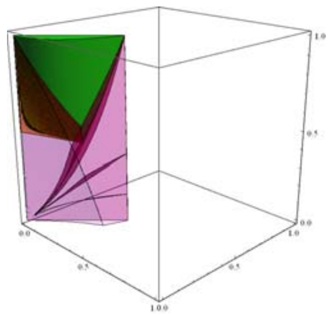
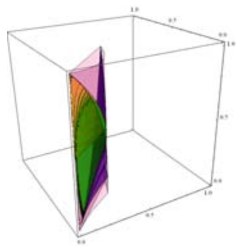
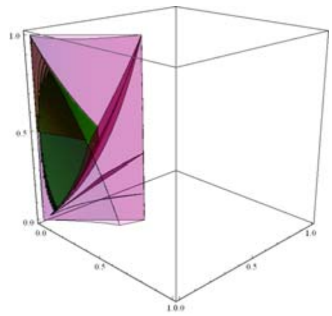
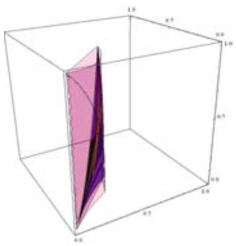
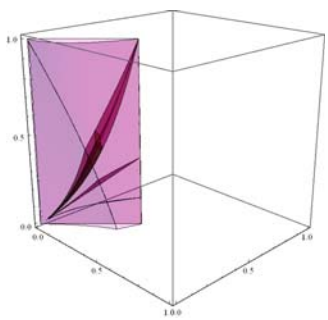
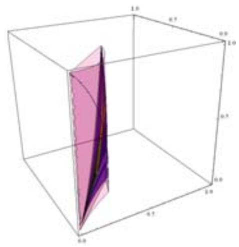
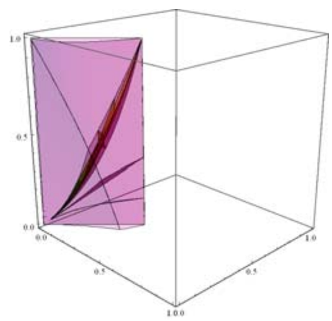
命中率的範圍	3.4 $f_{14} < 0 \wedge f_7 > 0$	3.5 $f_{14} > 0 \wedge f_7 < 0$	3.6 $f_{14} < 0 \wedge f_7 < 0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A**	**策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射**	**策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射**

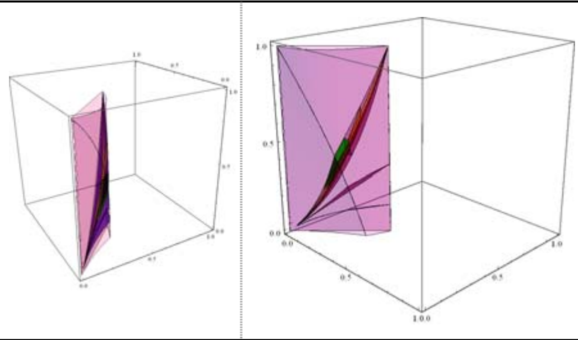
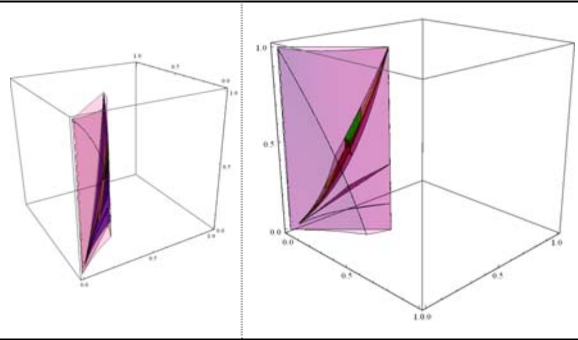
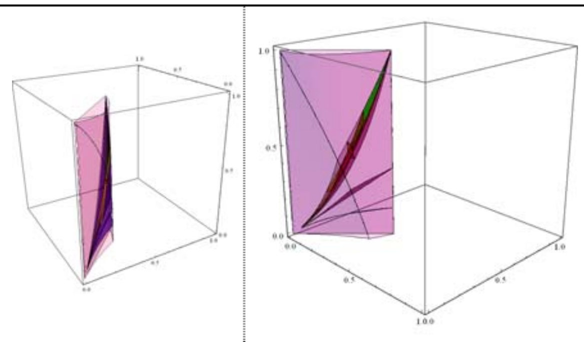
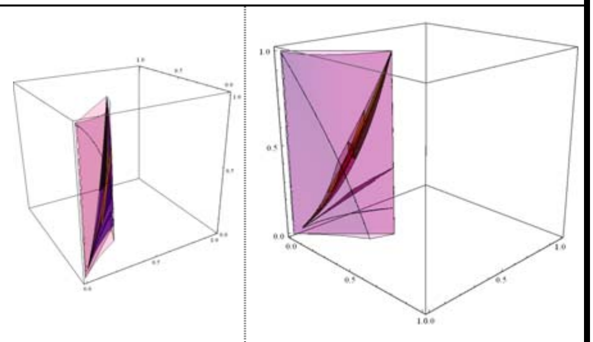
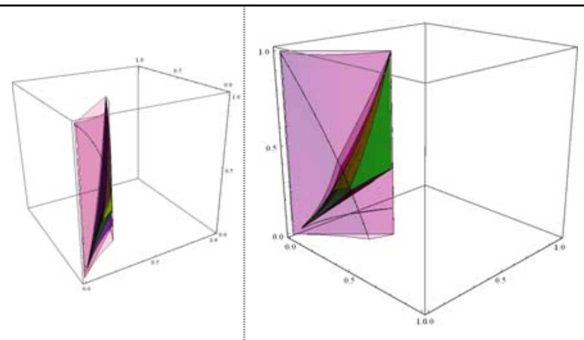
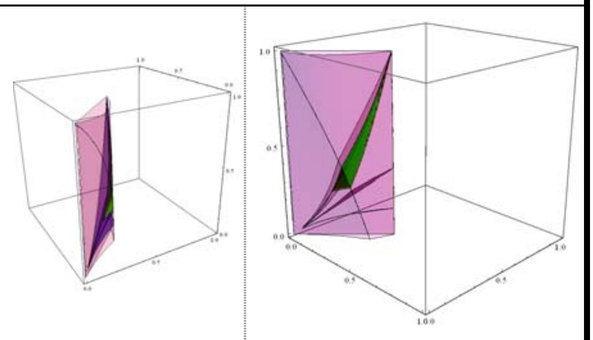
4. $f_2 > 0 \wedge f_5 > 0 \wedge f_6 < 0$

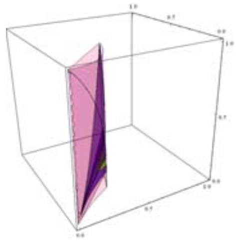
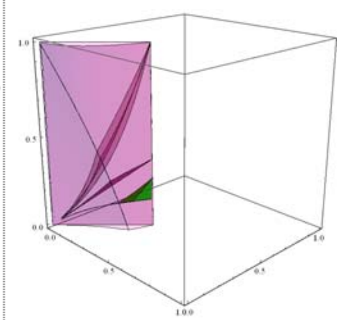
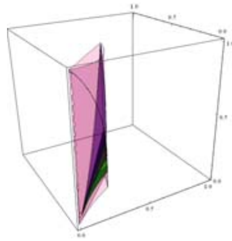
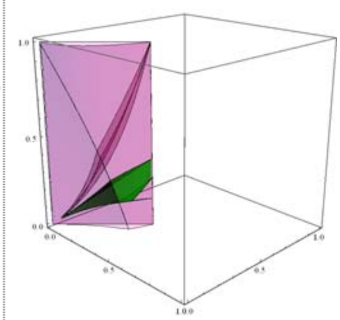
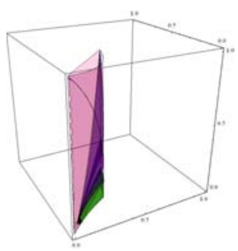
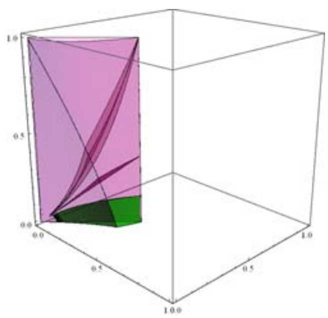
命中率的範圍	<u>4.1</u> $f_{13} < 0$	
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**	
命中率的範圍	<u>4.2</u> $f_{13} > 0 \wedge f_{20} > 0$	
	$f_{37} > 0$	$f_{37} < 0$
命中率範圍的對應圖形	 	 
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**
命中率的範圍	<u>4.3</u> $f_{20} < 0 \wedge f_8 < 0$	
	$f_{37} > 0$	$f_{37} < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

命中率的範圍	<u>4.4</u> $f_{14} > 0 \wedge f_8 > 0$	<u>4.5</u> $f_{14} < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**	**策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A**

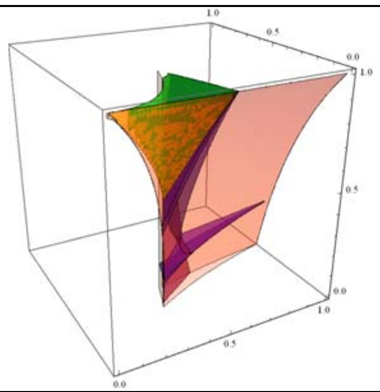
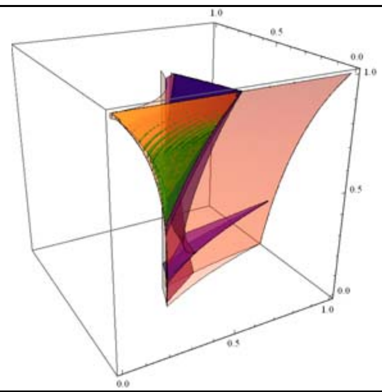
5. $f_1 > 0 \wedge f_2 > 0 \wedge f_6 > 0$

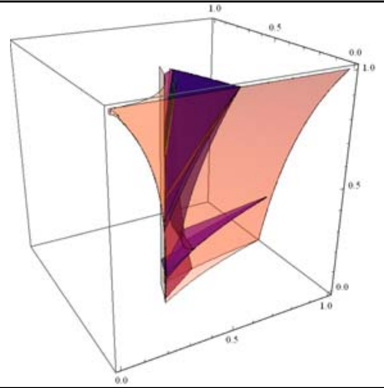
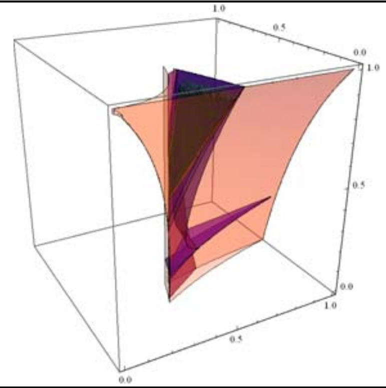
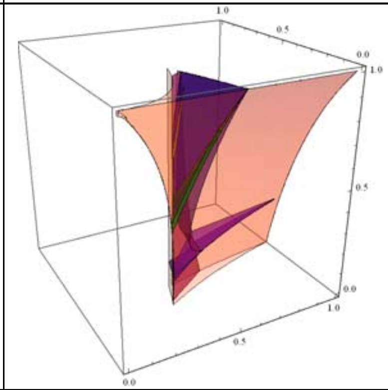
命中率的範圍	<u>5.1</u> $f_{13} < 0$	
	$f_{24} > 0$	$f_{24} < 0$
命中率範圍的對應圖形	 	 
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**	**策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A**
命中率的範圍	<u>5.2</u> $f_{13} > 0 \wedge f_{20} > 0$	
	$f_{24} < 0 \wedge f_{25} < 0 \wedge f_{37} > 0$	$f_{24} < 0 \wedge f_{25} > 0 \wedge f_{37} > 0$
命中率範圍的對應圖形	 	 
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A**	**策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A**

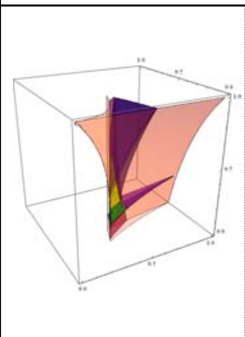
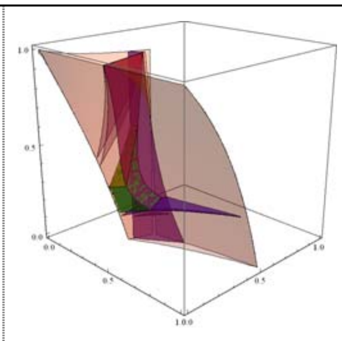
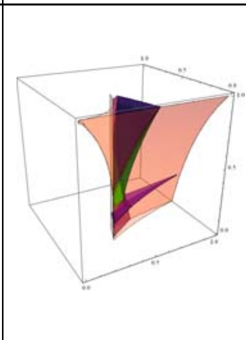
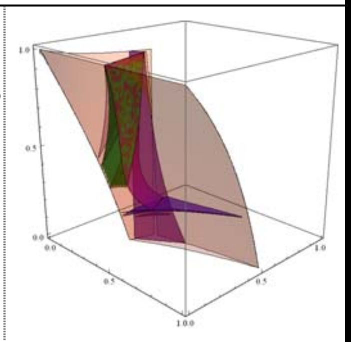
命中率的範圍	$f_{24}<0\wedge f_{25}>0\wedge f_{37}<0$	$f_{24}>0\wedge f_{25}>0\wedge f_{37}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**
命中率的範圍	$f_{24}>0\wedge f_{25}<0\wedge f_{37}<0$	$f_{24}>0\wedge f_{25}<0\wedge f_{37}>0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(22): A 不射, B 射 C, C 射 A**	**策略(22): A 不射, B 射 C, C 射 A**
命中率的範圍	5.3 $f_{20}<0\wedge f_{8}<0$	
	$f_{37}>0$	$f_{37}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

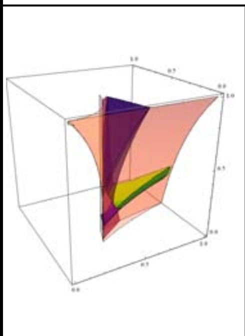
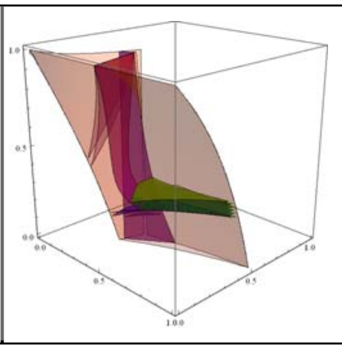
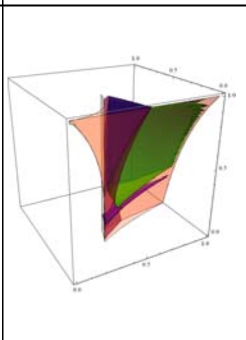
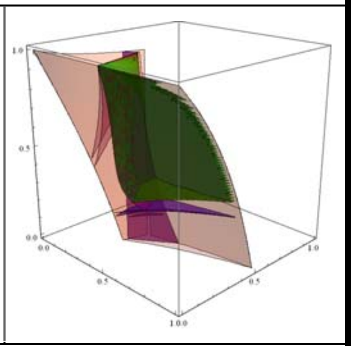
命中率 的範圍	<u>5.4</u> $f_{14}>0 \wedge f_8>0$	
	$f_{26}>0$	$f_{26}<0$
命中率範圍 的對應圖形	 	 
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**
命中率 的範圍	<u>5.5</u> $f_{14}<0$	
命中率範圍 的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A**	

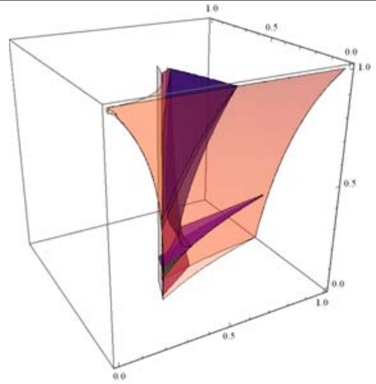
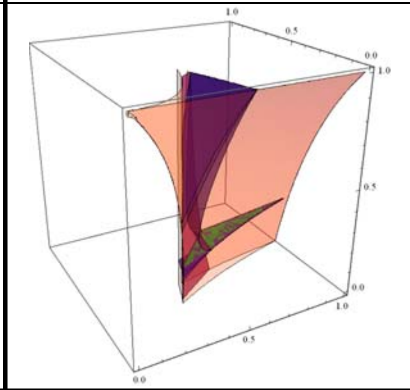
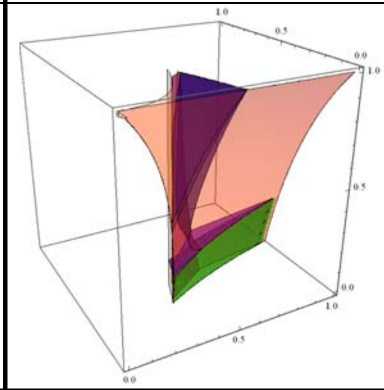
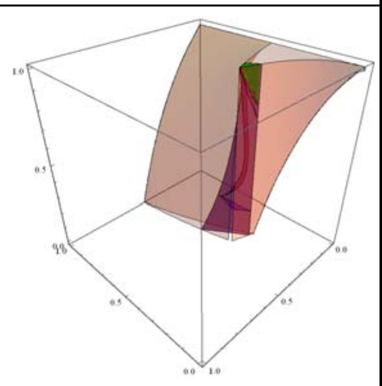
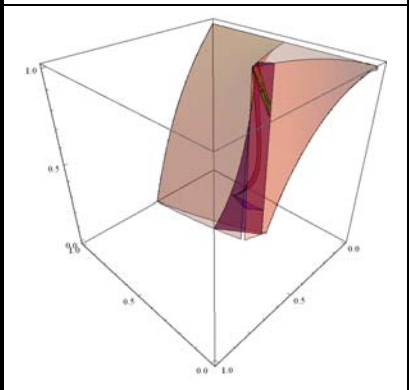
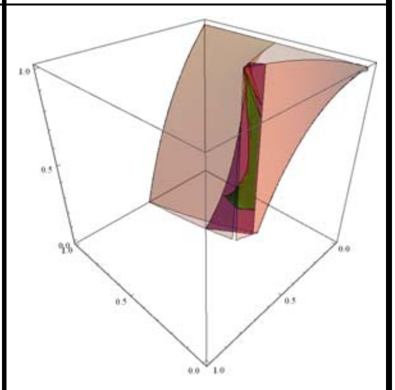
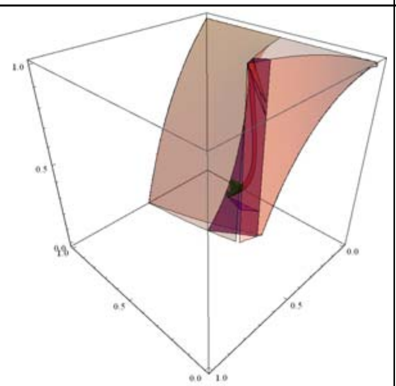
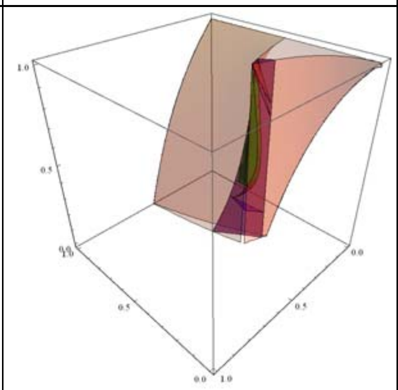
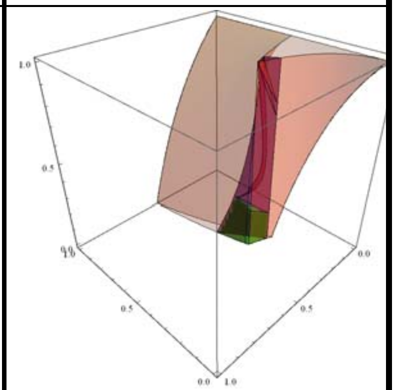
6. $f_2<0 \wedge f_3<0 \wedge f_6>0$

命中率 的範圍	<u>6.1</u> $f_{13}<0 \wedge f_{12}>0$	
	$f_{24}>0$	$f_{24}<0$
命中率範圍 的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**

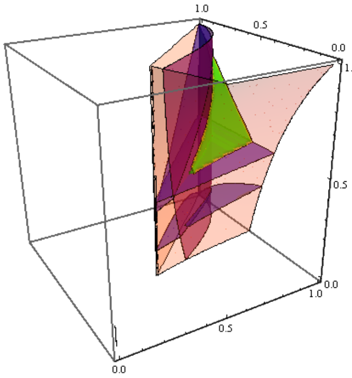
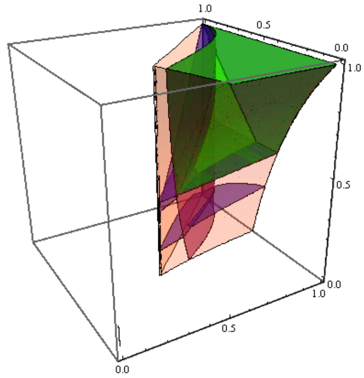
命中率的範圍	6.2 $f_{13}>0 \wedge f_{20}>0$		
	$f_{25}<0$	$f_{25}>0 \wedge f_{24}>0$	$f_{24}<0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(22): A 不射, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射 C 射 A**

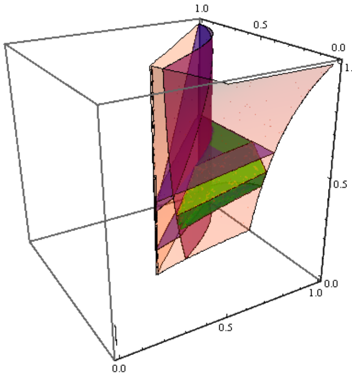
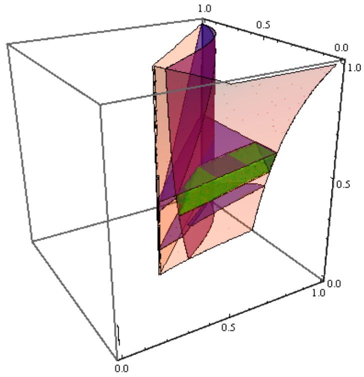
命中率的範圍	6.3 $f_{14}>0 \wedge f_{20}<0 \wedge f_{27}<0 \wedge f_{7}>0$	
	$f_{37}>0$	$f_{37}<0$
命中率範圍的對應圖形	 	 
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

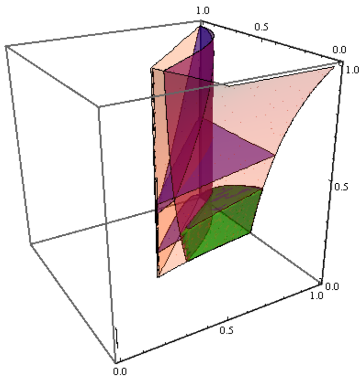
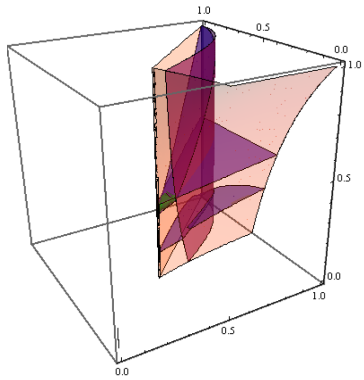
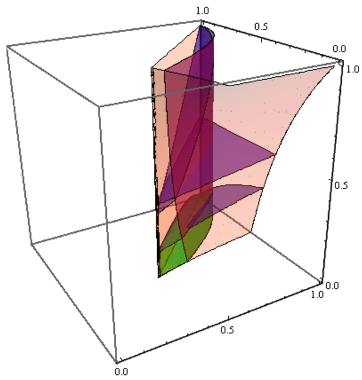
命中率的範圍	6.4 $f_{10}<0 \wedge f_{27}>0$	
	$f_{21}>0$	$f_{21}<0$
命中率範圍的對應圖形	 	 
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

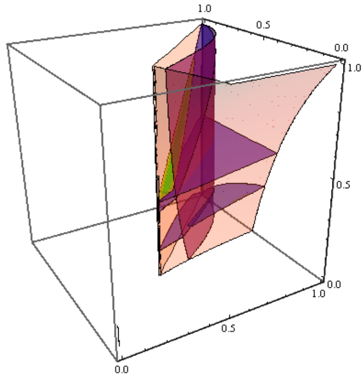
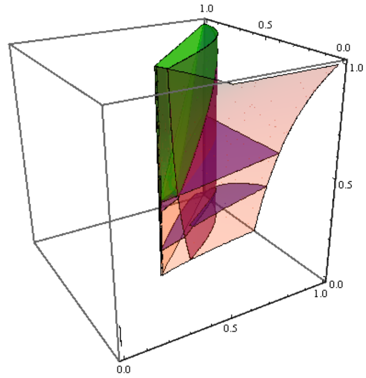
<table>
<tr><td>命中率
的範圍</td><td>$\underline{6.5}$ $f_7 > 0 \wedge f_{14} < 0$</td><td>$\underline{6.6}$ $f_7 < 0 \wedge f_{10} > 0 \wedge f_{14} > 0$</td><td>$\underline{6.7}$ $f_7 < 0 \wedge f_{14} < 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>槍手 A, B, C
的最佳策略</td><td>策略(4):
A 射 B, B 射 C, C 射 A</td><td>策略(3):
A 射 B, B 射 A, C 不射</td><td>策略(3):
A 射 B, B 射 A, C 不射</td></tr>
<tr><td>命中率
的範圍</td><td>$\underline{6.8}$ $f_{12} < 0 \wedge f_{13} < 0$</td><td>$\underline{6.9}$ $f_{12} < 0 \wedge f_{13} > 0 \wedge f_{20} > 0$</td><td>$\underline{6.10}$ $f_{12} < 0 \wedge f_{20} < 0 \wedge$
$f_{27} < 0 \wedge f_7 > 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>槍手 A, B, C
的最佳策略</td><td>策略(13):
A 射 C, B 射 C, C 射 A</td><td>策略(22):
A 不射, B 射 C, C 射 A</td><td>策略(3):
A 射 B, B 射 A, C 不射</td></tr>
<tr><td rowspan="2">命中率
的範圍</td><td colspan="2">$\underline{6.11}$ $f_{12} < 0 f_{27} > 0 \wedge f_{10} < 0$</td><td rowspan="2">$\underline{6.12}$
$f_{12} < 0 \wedge f_7 < 0 \wedge f_{10} > 0$</td></tr>
<tr><td>$f_{21} > 0$</td><td>$f_{21} < 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>槍手 A, B, C
的最佳策略</td><td>策略(7):
A 射 B, B 不射, C 射 A</td><td>策略(16):
A 射 C, B 不射, C 射 A</td><td>策略(3):
A 射 B, B 射 A, C 不射</td></tr>
</table>

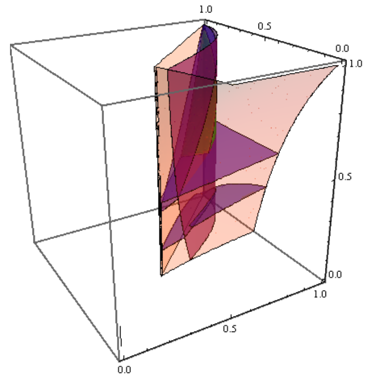
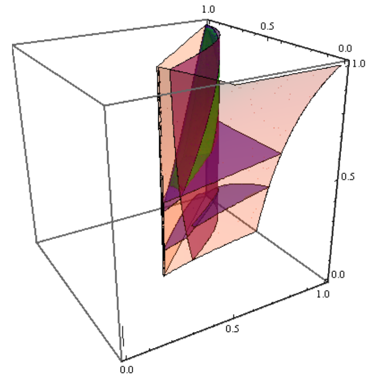
7. $f_1 > 0 \wedge f_2 < 0 \wedge f_3 > 0$

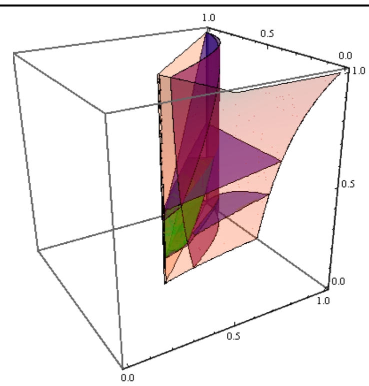
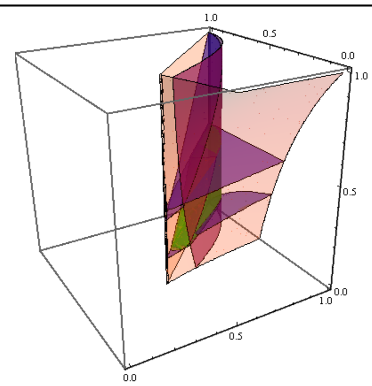
命中率的範圍	$\underline{7.1}$ $f_{12} > 0 \wedge f_9 < 0$	
	$f_{21} > 0$	$f_{21} < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

命中率的範圍	$\underline{7.2}$ $f_{12} > 0 \wedge f_9 > 0 \wedge f_{14} > 0$	
	$f_{26} > 0$	$f_{26} < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

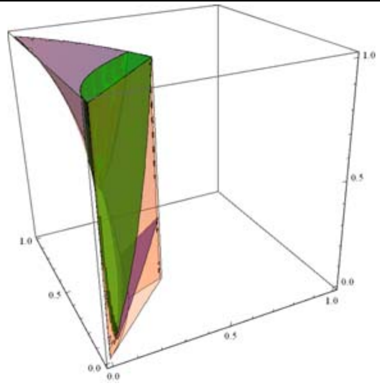
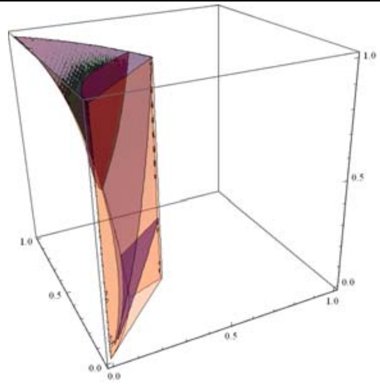
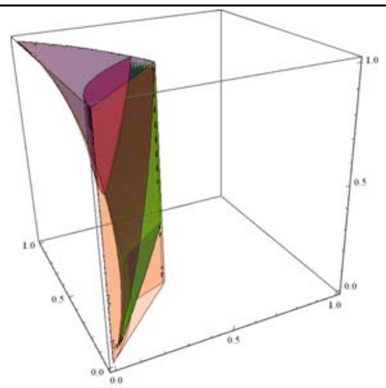
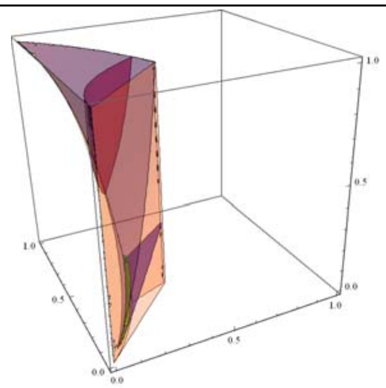
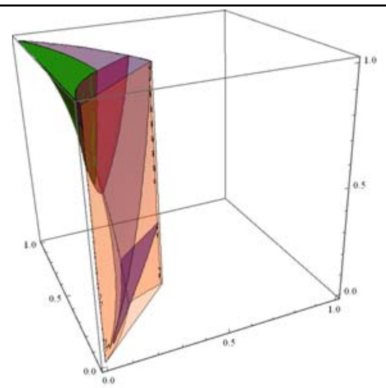
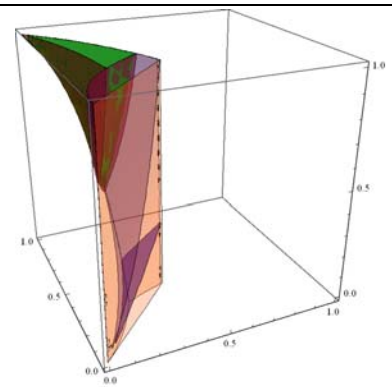
命中率的範圍	$\underline{7.3}$ $f_{12} > 0 \wedge f_{14} < 0$	$\underline{7.4}$ $f_{12} < 0 \wedge f_{15} < 0 \wedge f_9 > 0$	$\underline{7.5}$ $f_{12} < 0 \wedge f_{16} < 0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**	**策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A**

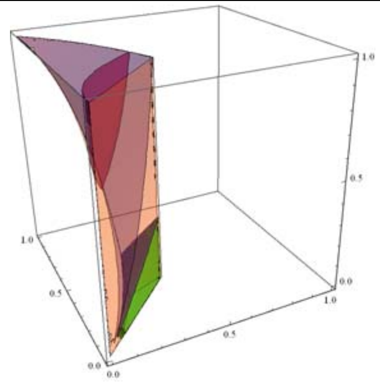
命中率的範圍	7.6 $f_{12}<0 \wedge f_{15}<0 \wedge f_9<0$	
	$f_{21}>0$	$f_{21}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A**	**策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A**

命中率的範圍	7.7 $f_{12}<0 \wedge f_{15}>0 \wedge f_9<0$	
	$f_{36}>0$	$f_{36}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A**	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**

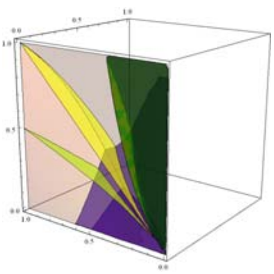
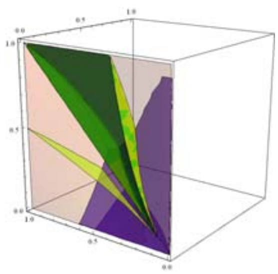
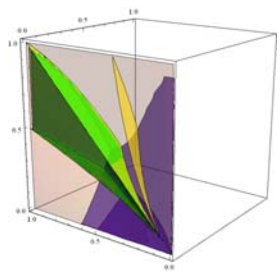
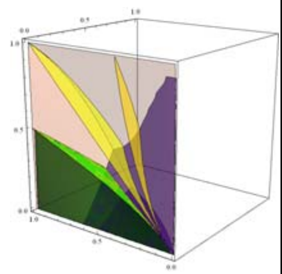
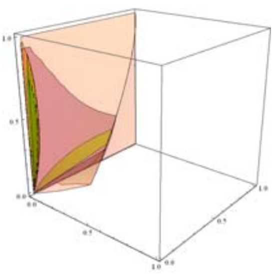
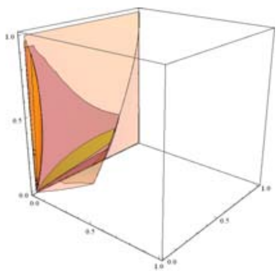
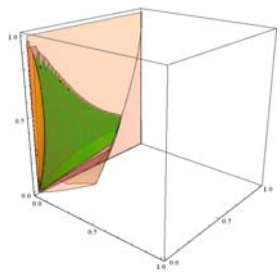
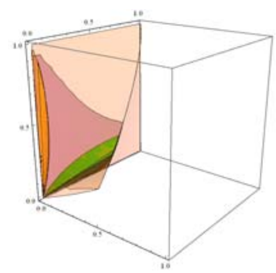
命中率的範圍	7.8 $f_{12}<0 \wedge f_{15}>0 \wedge f_9>0 \wedge f_{16}>0$	
	$f_{35}>0$	$f_{35}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A**	**策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A**

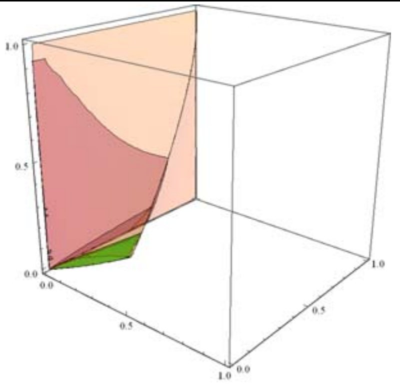
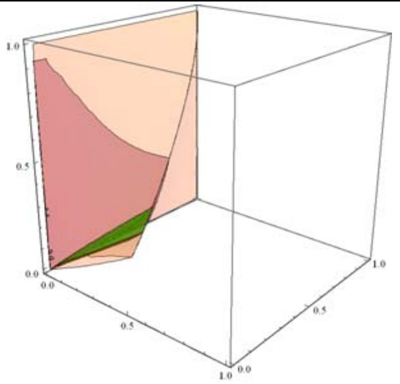
8. $f_1 < 0 \wedge f_2 > 0 \wedge f_3 > 0 \wedge f_4 > 0$

<table>
<tr><td>命中率
的範圍</td><td>8.1 $f_{20} > 0 \wedge f_{18} > 0$</td><td>8.2 $f_{20} < 0 \wedge f_{18} < 0 \wedge f_{11} > 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>槍手 A, B, C
的最佳策略</td><td>策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射</td><td>策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B</td></tr>
<tr><td rowspan="2">命中率
的範圍</td><td colspan="2">8.3 $f_{20} < 0 \wedge f_{18} > 0 \wedge f_{11} > 0$</td></tr>
<tr><td>$f_{28} > 0$</td><td>$f_{28} < 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>槍手 A, B, C
的最佳策略</td><td>策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B</td><td>策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射</td></tr>
<tr><td rowspan="2">命中率
的範圍</td><td colspan="2">8.4 $f_{20} > 0 \wedge f_{18} < 0$</td></tr>
<tr><td>$f_{29} > 0$</td><td>$f_{29} < 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>槍手 A, B, C
的最佳策略</td><td>策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射</td><td>策略(14): A 射 C, B 射 C, C 射 B</td></tr>
</table>

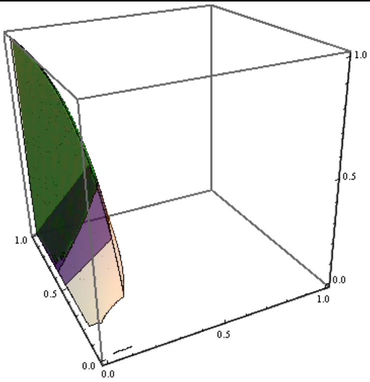
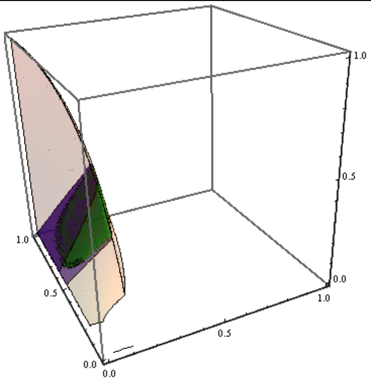
命中率的範圍	<u>8.5</u> $f_{11} < 0$
命中率範圍的對應圖形	
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**

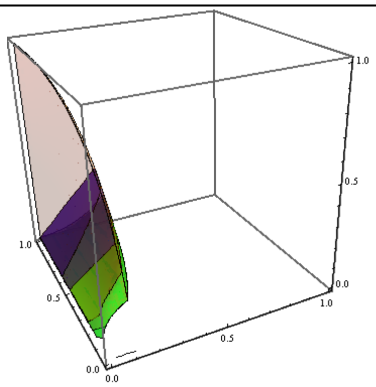
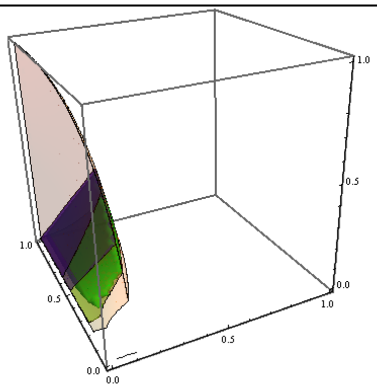
9. $f_3 > 0 \wedge f_4 < 0$

命中率的範圍	<u>9.1</u> $f_8 < 0 \wedge f_{18} < 0$			
	$f_{30} < 0$	$f_{30} > 0 \wedge f_{21} < 0$	$f_{21} > 0 \wedge f_{31} > 0$	$f_{31} < 0$
命中率範圍的對應圖形				
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(14): A 射 C, B 射 C, C 射 B**	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**	**策略(5): A 射 B, B 射 C, C 射 B**
命中率的範圍	<u>9.2</u> $f_8 < 0 \wedge f_{18} > 0$			
	$f_{33} < 0$	$f_{33} > 0 \wedge f_{32} > 0$	$f_{32} < 0 \wedge f_{31} > 0$	$f_{31} < 0$
命中率範圍的對應圖形				
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(12): A 射 C, B 射 A, C 不射**	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**	**策略(5): A 射 B, B 射 C, C 射 B**

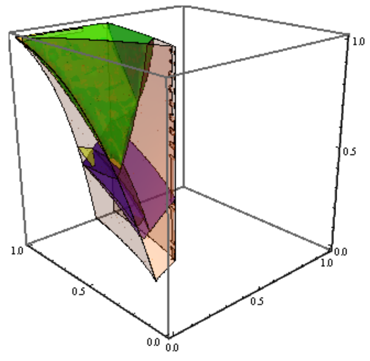
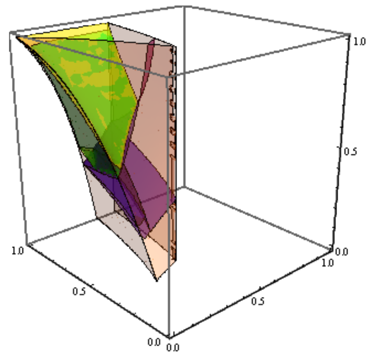
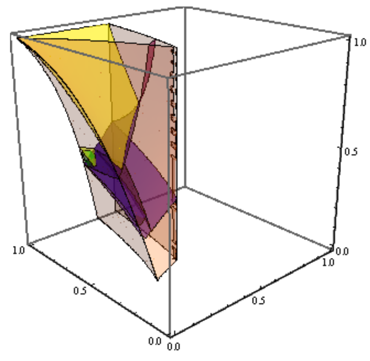
命中率的範圍	<u>9.3</u> $f_8>0$	
	$f_{34}>0$	$f_{34}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(2): A 射 B, B 射 A, C 射 B**	**策略(2): A 射 B, B 射 A, C 射 B**

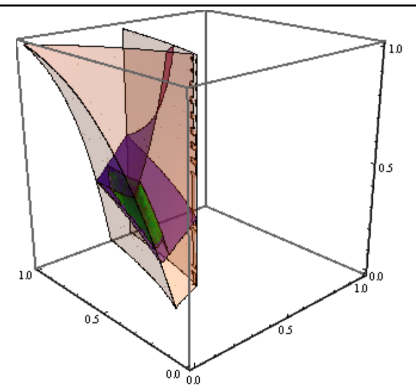
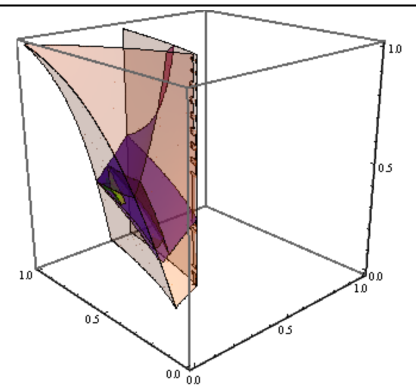
10. $f_3<0 \wedge f_4<0$

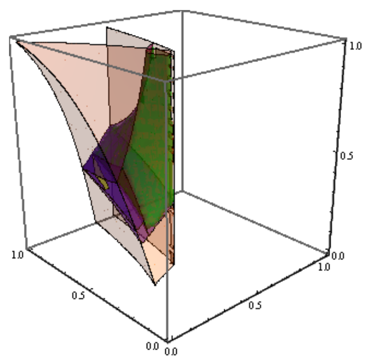
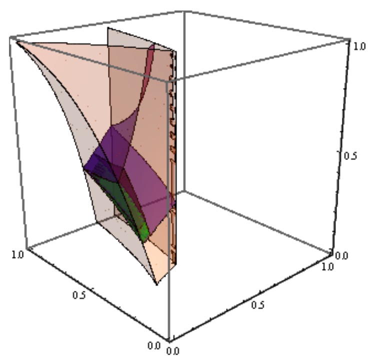
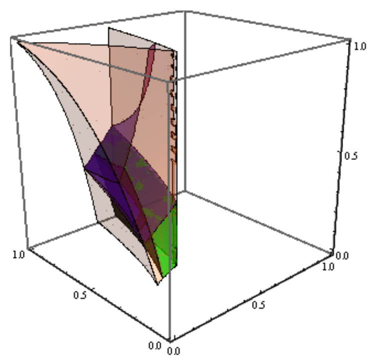
命中率的範圍	<u>10.1</u> $f_8<0 \wedge f_{18}<0$	<u>10.2</u> $f_8<0 \wedge f_{18}>0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(23): A 不射,B 射 C, C 射 B**	**策略(23): A 不射,B 射 C, C 射 B**

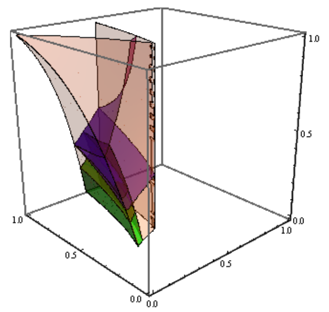
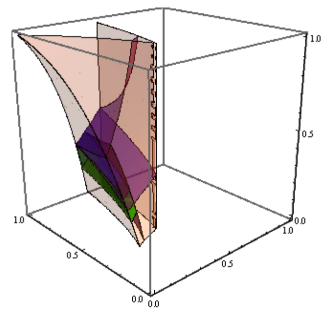
命中率的範圍	<u>10.3</u> $f_8>0$	
	$f_{34}>0$	$f_{34}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(5): A 射 B, B 射 C, C 射 B**	**策略(5): A 射 B, B 射 C, C 射 B**

11. $f_2 > 0 \wedge f_3 < 0 \wedge f_4 > 0$

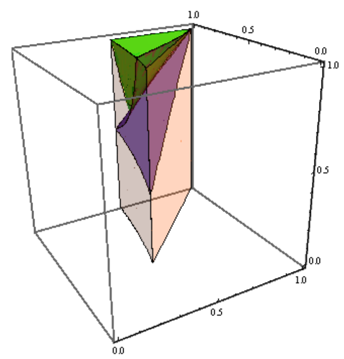
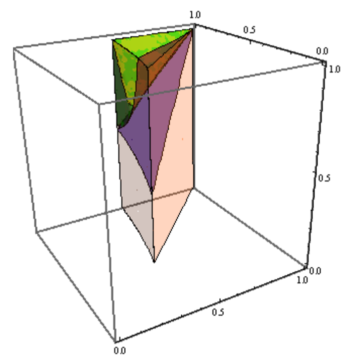
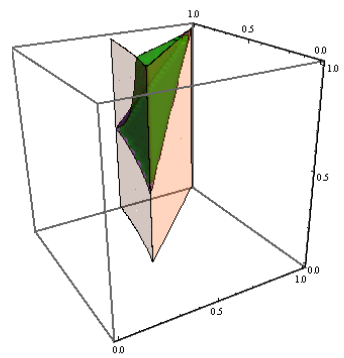
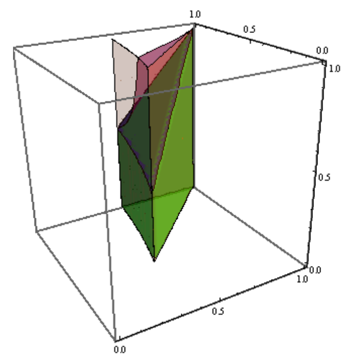
命中率的範圍	11.1 $f_{18} < 0$		
	$f_{29} < 0 \wedge f_{28} > 0$	$f_{29} > 0 \wedge f_{28} > 0$	$f_{29} > 0 \wedge f_{28} < 0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**	**策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射**

命中率的範圍	11.2 $f_{11} > 0 \wedge f_{18} > 0 \wedge f_{23} < 0$	
	$f_{28} > 0$	$f_{28} < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**	**策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射**

命中率的範圍	11.3 $f_8 < 0 \wedge f_{18} > 0 \wedge f_{23} > 0$	11.4 $f_8 > 0 \wedge f_{11} > 0 \wedge f_{23} > 0$	11.5 $f_{11} < 0 \wedge f_{23} < 0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(23): A 不射,B 射 C, C 射 B**	**策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射**	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**

命中率的範圍	<u>11.6</u> $f_{11}<0 \wedge f_{23}>0$	
	$f_{35}>0$	$f_{35}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(2): A 射 B, B 射 A, C 射 B**	**策略(2): A 射 B, B 射 A, C 射 B**

12. $f_1<0 \wedge f_2<0$

命中率的範圍	<u>12.1</u> $f_{18}<0$	
	$f_{36}>0$	$f_{36}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**
命中率的範圍	<u>12.2</u> $f_8<0 \wedge f_{18}>0$	<u>12.3</u> $f_8>0 \wedge f_{18}>0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 A, B, C 的最佳策略	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**	**策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B**

柒、討論

一、不完全訊息槍手賽局：

以上研究我們皆假設槍手們都知道彼此的命中率，藉此找出最佳策略。然而在現實生活中，槍手們可能不清楚其他槍手們的命中率，所以我們希望能藉由以上的研究結果，討論以下不同情形時，槍手們的不完美最佳策略：

***Case* 1: 不知道槍手們的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略。**

***Case* 2: 不知道槍手們的命中率，也不知道槍手們過去所選擇的策略。**

其中若我們擁有槍手們過去的行動，其實間接地限制了命中率的範圍，因為只有在特定的命中率值下，他們才會選擇這些策略。

我們發現藉由先前研究所建構之全決策盒，便能回答這些問題，將方法及結果整理如下：(此處討論假設除了目標槍手外，其餘槍手皆擁有完全訊息，並選擇了最佳策略)

(一)不知道槍手們的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略：

1.不知道槍手們(包括自己)的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略(第一回合)：

1.1 若槍手 C 不知道槍手 A, B, C 的命中率，問槍手 C 第一回合的不完美最佳策略。

在全決策盒中，一個決策組合成為最佳策略組合的機率就是其所占區域體積。

而槍手 C 在第一回合時，可以知道槍手 A, B 所選的策略，因此如果我們已知 A 射 B, B 射 A(存在於策略(1),(2),(3)當中)時，我們有：

$$P(\text{A射B, B射A})=\text{全決策盒中策略(1),(2),(3)所佔體積和}$$

我們可以用條件機率的方式計算槍手 C 選擇三種策略成為最佳策略的機率：

$$P(\text{C射A}|\text{A射B, B射A})=\frac{P(\text{C射A, A射B, B射A})}{P(\text{A射B, B射A})}=\frac{\text{全決策盒中策略(1)所佔體積}}{\text{全決策盒中策略(1),(2),(3)所佔體積和}}$$

$$P(\text{C射B}|\text{A射B, B射A})=\frac{P(\text{C射B, A射B, B射A})}{P(\text{A射B, B射A})}=\frac{\text{全決策盒中策略(2)所佔體積}}{\text{全決策盒中策略(1),(2),(3)所佔體積和}}$$

$$P(\text{C不射}|\text{A射B, B射A})=\frac{P(\text{C不射, A射B, B射A})}{P(\text{A射B, B射A})}=\frac{\text{全決策盒中策略(3)所佔體積}}{\text{全決策盒中策略(1),(3),(3)所佔體積和}}$$

計算得 $P(\text{C射A}|\text{A射B, B射A})=0.435865$

$P(\text{C射B}|\text{A射B, B射A})=0.125816$

$P(\text{C不射}|\text{A射B, B射A})=0.438319$

因此，槍手 C 的不完美最佳策略就是不射擊。

而槍手 C 的不完美最佳混合策略如下：

44% - C 射 A,　13% - C 射 B,　44% - C 不射

以此類推，我們將槍手 A, B 不同策略組合下，槍手 C 的不完美最佳策略及最佳混合策略整理如下表:

槍手 A 的策略	槍手 B 的策略	**槍手 C 的不完美最佳策略**			
		純策略	混合策略(%)		
			C 射 A	C 射 B	C 不射
A 射 B	B 射 A	**C 不射**	43	13	**44**
A 射 B	B 射 C	**C 不射**	26	36	**38**
A 射 B	B 不射	**C 射 A**	**100**	0	0
A 射 C	B 射 A	**C 射 A**	**94**	0	6
A 射 C	B 射 C	**C 射 A**	**77**	23	0
A 射 C	B 不射	**C 射 A**	**100**	0	0
A 不射	B 射 A	**無**	無	無	無
A 不射	B 射 C	**C 射 B**	0	**100**	0
A 不射	B 不射	**無**	無	無	無

1.2 若槍手 B 不知道槍手 A, B, C 的命中率,問槍手 B 第一回合的不完美最佳策略。

仿照 1.1 的討論方式，計算槍手 B 選擇三種策略成為最佳策略的機率，便能找出已知槍手 A 策略(第一回合時，槍手 B 只知道槍手 A 的策略)的情況下，槍手 B 的不完美最佳策略及最佳混合策略如下表:

槍手 A 的策略	**槍手 B 的不完美最佳策略**			
	純策略	混合策略(%)		
		B 射 A	B 射 C	B 不射
A 射 B	**B 射 A**	**40**	22	38
A 射 C	**B 射 A**	**94**	6	0
A 不射	**B 射 C**	0	**100**	0

1.3 若槍手 A 不知道槍手 A, B, C 的命中率,問槍手 A 第一回合的不完美最佳策略。

仿照前述方法，但此時槍手 A 其實是沒有任何資訊的(第一回合)，計算槍手 A 選擇三種策略成為最佳策略的機率，比較後得:

槍手 A 的不完美最佳策略為: **A 射 C**

槍手 A 的不完美最佳混合策略為: 26% - A 射 B, 38% - A 射 C, 36% - A 不射

2.不知道槍手們(包括自己)的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略(第一回合後):

2.1 若槍手 C 不知道槍手 A, B, C 的命中率，但知道過去槍手 A, B 的行動，問槍手 C 的不完美最佳策略(第一回合後)。

槍手 C 在第一回合後，所得到的資訊沒有比第一回合多，因此此部分和 1.1 相同。

2.2 若槍手 B 不知道槍手 A, B, C 的命中率，但知道過去槍手 A, C 的行動，問槍手 B 的不完美最佳策略(第一回合後)。

槍手 B 在第一回合後，比第一回合多得到了槍手 C 的策略(槍手 C 在槍手 B 之後射擊)。仿照前述方式討論，槍手 B 的不完美最佳策略及最佳混合策略如下表:

槍手 A 的策略	槍手 C 的策略	槍手 B 的不完美最佳策略			
		純策略	混合策略(%)		
			B 射 A	B 射 C	B 不射
A 射 B	C 射 A	**B 射 A**	**53**	30	17
A 射 B	C 射 B	**B 射 C**	27	**73**	0
A 射 B	C 不射	**B 射 A**	**55**	45	0
A 射 C	C 射 A	**B 不射**	7	20	**73**
A 射 C	C 射 B	**B 射 C**	0	**100**	0
A 射 C	C 不射	**B 射 A**	**100**	0	0
A 不射	C 射 A	**B 射 C**	0	**100**	0
A 不射	C 射 B	**B 射 C**	0	**100**	0
A 不射	C 不射	**無**	無	無	無

2.3 若槍手 A 不知道槍手 A, B, C 的命中率，但知道過去槍手 B, C 的行動，問第一回合槍手 A 的不完美最佳策略。(第一回合後)

槍手 A 在第一回合後，比第一回合多得到了槍手 B, C 的策略(槍手 B, C 都在槍手 A 之後射擊)。仿照前述方法討論，將槍手 A 的不完美最佳策略及最佳混合策略整理如下表:

槍手 B 的策略	槍手 C 的策略	槍手 A 的不完美最佳策略			
		純策略	混合策略(%)		
			A 射 B	A 射 C	A 不射
B 射 A	C 射 A	**A 射 B**	**71**	29	0
B 射 A	C 射 B	**A 射 B**	**100**	0	0
B 射 A	C 不射	**A 射 B**	**97**	3	0
B 射 C	C 射 A	**A 射 C**	29	**70**	1
B 射 C	C 射 B	**A 不射**	10	5	**85**
B 射 C	C 不射	**A 射 B**	**100**	0	0
B 不射	C 射 A	**A 射 C**	6	**94**	0
B 不射	C 射 B	**無**	無	無	無
B 不射	C 不射	**無**	無	無	無

3.不知道其他槍手們(不含自己)的命中率，但知道槍手們過去選擇的策略(第一回合):

3.1 若槍手 C 不知道槍手 A, B 的命中率，但知道過去槍手 A, B 的行動，問槍手 C 第一回合的不完美最佳策略。

類似於 1.1 的討論，但我們多了槍手 C 命中率的條件，設已知 $c = p$，則所求為:

$$\mathrm{P}(\text{C射A} \mid c = p \wedge \text{A射B, B射A}) = \frac{\mathrm{P}(c = p \wedge \text{C射A, A射B, B射A})}{\mathrm{P}(c = p \wedge \text{A射B, B射A})}$$

為了將討論限制在已知槍手 C 的命中率 $c = p$ 的條件下，我們在**全決策盒與平面: $z = p$ 的截面**上進行討論，則一決策成為最佳策略的機率就是所占區域的面積。舉例來說，如果我們已知 A 射 B, B 射 A(存在於策略(1),(2),(3)當中)時:

$$\mathrm{P}(c = p \wedge \text{A射B, B射A}) = \text{截面上策略(1),(2),(3)所占區域面積}$$

當 p 值不同時，我們將不同策略所占區域面積整理如下:

命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	0.321086	0.129618	**0.549296**	0.6	**0.761132**	0.000000	0.238868
0.1	0.361960	0.136100	**0.501940**	0.7	**0.746629**	0.000000	0.253371
0.2	0.315839	0.145857	**0.538304**	0.8	**0.754502**	0.000000	0.245498
0.3	**0.782237**	0.116965	0.100798	0.9	**0.843808**	0.000000	0.156192
0.4	**0.986798**	0.000000	0.013202	1.0	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.5	**0.726563**	0.000000	0.273437				

以此類推，我們將槍手 A, B 不同策略組合下，槍手 C 的不完美最佳策略整理如下表: 此時沒有混合策略，因為機率的比例並非固定。

槍手 A 的策略	槍手 B 的策略	c 的範圍	槍手 C 的不完美最佳策略
A 射 B	B 射 A	$c < 0.24$	**C 不射**
		$c > 0.24$	**C 射 A**
A 射 B	B 射 C	$c < 0.30$	**C 射 B**
		$0.30 < c < 0.65$	**C 射 A**
		$0.65 < c$	**C 不射**
A 射 B	B 不射	$c < 0.21$	**無**
		$c > 0.21$	**C 射 A**
A 射 C	B 射 A	$c < 0.37$	**C 射 A**
		$c > 0.37$	**C 不射**
A 射 C	B 射 C	無限制	**C 射 A**
A 射 C	B 不射	無限制	**C 射 A**
A 不射	B 射 A	無限制	**無**
A 不射	B 射 C	無限制	**C 射 B**
A 不射	B 不射	無限制	**無**

3.2 若槍手 B 不知道槍手 A, C 的命中率，但知道過去槍手 A, C 的行動，問槍手 B 第一回合的不完美最佳策略。

仿照 3.1 的方法，但我們有的資訊為槍手 B 的命中率，因此要在全決策盒與平面: $y=p$ 的截面上進行討論，因為第一回合時，槍手 B 只知道槍手 A 的決策，因此將槍手 A 不同策略下，槍手 B 的不完美最佳策略整理如下表:

槍手 A 的策略	b 的範圍	槍手 B 的不完美最佳策略
A 射 B	$b<0.17$	**B 射 A**
	$0.17<b<0.37$	**B 射 C**
	$0.37<b<0.79$	**B 射 A**
	$0.79<b$	**B 射 C**
A 射 C	無限制	**B 射 C**
A 不射	無限制	**B 射 C**

3.3 若槍手 A 不知道槍手 B, C 的命中率，問槍手 A 第一回合的不完美最佳策略。

仿照上述方式討論，但此時槍手 A 其實是沒有任何資訊的(第一回合)，計算槍手 A 選擇三種策略成為最佳策略的機率，比較後得:

a 的範圍	槍手 A 的不完美最佳策略
$a<0.56$	**A 不射**
$a>0.56$	**A 射 C**

4.不知道其他槍手們(不含自己)的命中率，但知道槍手們過去所選策略(第一回合後):

4.1 若槍手 C 不知道槍手 A, B 的命中率，但知道過去槍手 A, B 的行動，問槍手 C 的不完美最佳策略。

槍手 C 在第一回合後，所得到的資訊沒有比第一回合多，因此此部分和 3.1 相同。

4.2 若槍手 B 不知道槍手 A, C 的命中率，但知道過去槍手 A, C 的行動，問槍手 B 不完美最佳策略。

槍手 B 在第一回合後，比第一回合多得到槍手 C 的策略(槍手 C 在槍手 B 之後射擊)。仿照前述方式討論，槍手 B 的不完美最佳策略及最佳混合策略如下表:

槍手 A 的策略	槍手 C 的策略	b 的範圍	槍手 B 的不完美最佳策略
A 射 B	C 射 A	$b<0.38$	**B 射 C**
		$0.38<b<0.79$	**B 射 A**
		$0.79<b$	**B 不射**
A 射 B	C 射 B	無限制	**B 射 C**
A 射 B	C 不射	$b<0.42$	**B 射 A**
		$b>0.42$	**B 射 C**

A 射 C	C 射 A	$b < 0.67$	**B 不射**
		$b > 0.67$	**B 射 C**
		$b = 1$	**無**
A 射 C	C 射 B	$b < 1$	**B 射 C**
		$b = 1$	**無**
A 射 C	C 不射	$b < 0.12$	**B 射 A**
		$b > 0.12$	**無**
A 不射	C 射 A	$b < 0.20$	**無**
		$0.20 < b < 0.33$	**B 射 C**
		$0.34 < b < 0.35$	**無**
		$0.35 < b < 0.38$	**B 射 C**
		$0.38 < b$	**無**
A 不射	C 射 B	無限制	**B 射 C**
A 不射	C 不射	無限制	**無**

4.3 若槍手 A 不知道槍手 B, C 的命中率，但知道過去槍手 B, C 的行動，問槍手 A 的不完美最佳策略。

槍手 A 在第一回合後，比第一回合多得到了槍手 B, C 的策略(槍手 B, C 都在槍手 A 之後射擊)。仿照前述方法討論，將槍手 A 的不完美最佳策略及最佳混合策略整理如下表:

槍手 B 的策略	槍手 C 的策略	a 的範圍	槍手 A 的不完美最佳策略
B 射 A	C 射 A	$a < 0.36$	A 射 B
		$0.36 < a < 0.52$	A 射 C
		$0.52 < a$	A 射 B
B 射 A	C 射 B	$a < 0.50$	A 射 B
		$0.50 < a$	無
B 射 A	C 不射	無限制	A 射 B
B 射 C	C 射 A	$a < 0.35$	A 射 C
		$0.35 < a < 0.54$	A 射 B
		$0.54 < a < 1$	A 射 C
		$a = 1$	無
B 射 C	C 射 B	無限制	A 不射
B 射 C	C 不射	$a < 0.38$	A 射 B
		$a > 0.38$	無
B 不射	C 射 A	無限制	A 射 C
B 不射	C 射 B	無限制	無
B 不射	C 不射	無限制	無

(二)不知道槍手們的命中率，也不知道槍手們過去所選擇的策略:

1.若某槍手不知道槍手 A, B, C 的命中率及另外兩人的策略，問其不完美最佳策略:

同樣地，我們只要在全決策盒中，找出所占區域體積最大的槍手策略，就能找出其不完美最佳策略。依據這三塊區域體積的大小比例，亦能找出 C 的不完美最佳混合策略(分配機率到三個策略上)。

	不完美最佳策略	不完美最佳混合策略
槍手 A	**A 射 C**	26% - A 射 B, 38% - A 射 C, 36% - A 不射
槍手 B	**B 射 C**	14% - B 射 A, 58% - B 射 C, 28% - B 不射
槍手 C	**C 射 A**	47% - C 射 A, 44% - C 射 B, 9% - C 不射

2.若某槍手不知道其他槍手們的命中率及另外兩人的策略，問其不完美最佳策略:

2.1 槍手 C

首先為了將討論限制在已知槍手 C 的命中率 $c = p$ 的條件下，我們在全決策盒與平面: $z = p$ 的截面上進行討論，找出所占區域的面積最大的槍手策略，對於不同地 c 值，我們將結果整理如下表:

c 的範圍	槍手 C 的不完美最佳策略
$c < 0.29$	**C 射 B**
$c > 0.29$	**C 射 A**

2.2 槍手 B

仿照 2.1 的方法，但我們有的資訊為槍手 B 的命中率，因此要在全決策盒與平面: $y = p$ 的截面上進行討論，將槍手 B 的不完美最佳策略整理如下表:

b 的範圍	槍手 B 的不完美最佳策略
無限制	**B 射 C**

2.3 槍手 A

仿照上述方法，但我們有的資訊為槍手 A 的命中率，因此要在全決策盒與平面: $x = p$ 的截面上進行討論，將槍手 A 的不完美最佳策略整理如下表:

a 的範圍	槍手 A 的不完美最佳策略
$a < 0.56$	**A 不射**
$a > 0.56$	**A 射 C**

此部分地結果，我們可以清楚的看出順序所造成的影響，例如槍手 C 選擇射 A 或射 B 的臨界值為 0.29，並非 0.50。這些臨界值都是**槍手射擊順序**所造成的。

二、決策盒及決策空間所提供的訊息:

(一)槍手賽局:

我們有三個變數－三位槍手 A, B, C 的命中率 a, b, c ($0 < a, b, c \leqq 1$)，我們在空間坐標系中，將 a, b, c 視為三個分別在 x 軸、y 軸及 z 軸上移動的變量，建構全決策盒。從以上的研究及討論，我們將全決策盒能提供的訊息整理如下:

1.三人的最佳策略(純策略): 所有訊息(三位槍手的命中率及過去之行動)公開。

2.不知道槍手們(不包括自己)的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略

3.不知道槍手們(包括自己)的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略

4.若某槍手不知道其他槍手們的命中率及另外兩人的策略，問其不完美最佳策略

5.若某槍手不知道槍手 A, B, C 的命中率及另外兩人的策略，問其不完美最佳策略

(二)一般賽局(序列賽局):

我們先約定一些代號:

1.玩家: n 位，$\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_n$，遊戲順序為 $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_n$。

2.變數(影響玩家策略選擇): m 個，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$。

3.策略集: 玩家 Ω_i 的策略記為 $\left\{\sigma_{\Omega_i}\right\}$。

4.最佳策略組合: $(\overline{\sigma_{\Omega_1}},\overline{\sigma_{\Omega_2}},\ldots,\overline{\sigma_{\Omega_n}})$

5.訊息集: (1)行動訊息集 $\left\{\overline{\sigma}\right\}$: 過去槍手們的行動(所選策略)。

(2)變數訊息集 $\left\{\overline{\alpha}\right\}$: 數個已知變數所成之集合，為 $\left\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\right\}$ 之子集。

6.全決策空間: 全決策盒之推廣，在 m 維(每一變數皆視為在軸上移動之便量)直角座標系中，將每一點($x_1, x_2, x_3,\ldots$)對應到 $\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2, \ldots, \alpha_n = x_n$ 時，玩家 $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ 的最佳策略組合$(\overline{\sigma_{\Omega_1}},\overline{\sigma_{\Omega_2}},\ldots,\overline{\sigma_{\Omega_n}})$。

<u>全決策空間提供之訊息</u>:

- 對於**任意**玩家，若所有變數及過去玩家策略皆為已知(也就是完全訊息賽局)，則藉由全決策空間與最佳策略組合的對應關係，我們能知道每位玩家的最佳策略。
- 對於**任意**玩家，對於缺乏**任意變數值**或**其他玩家過去的行動**資訊的賽局，我們可以找出其不完美最佳策略及不完美最佳混合策略。

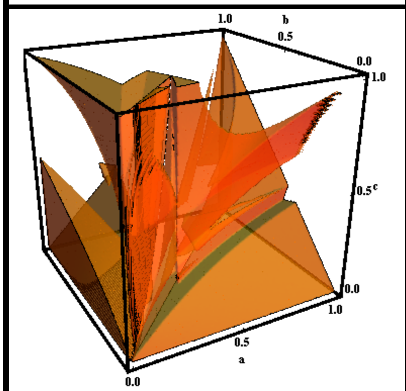
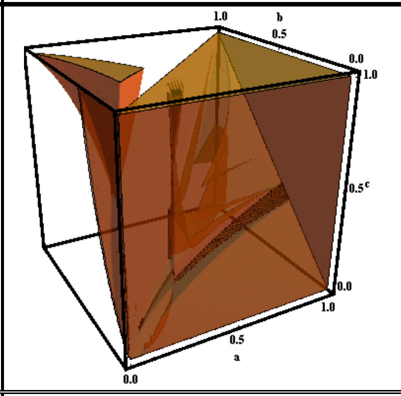
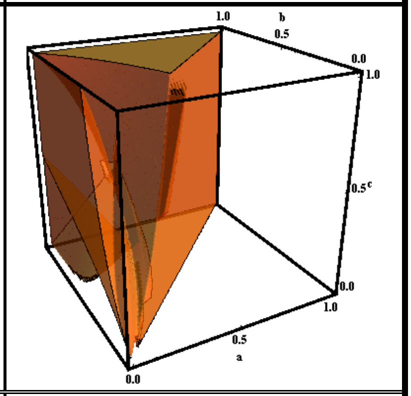
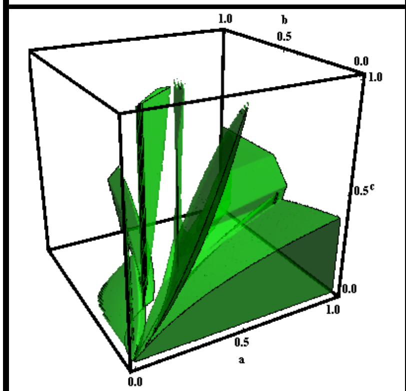
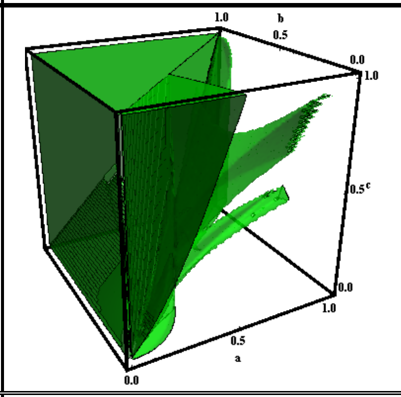
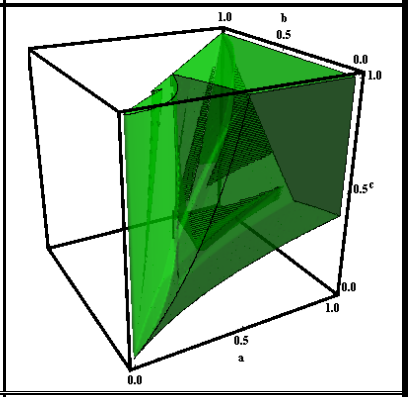
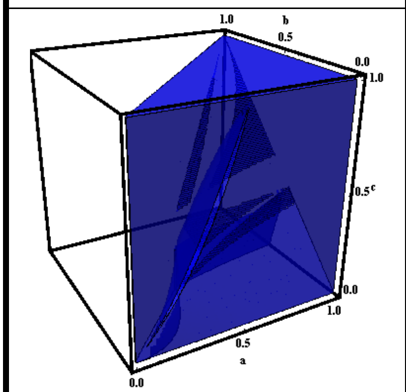
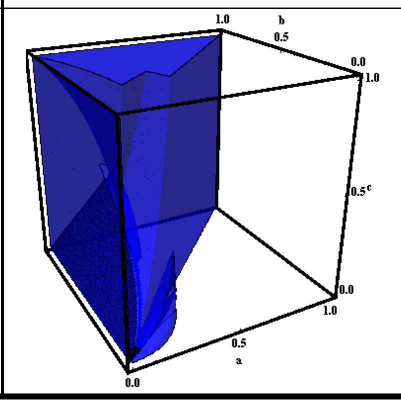
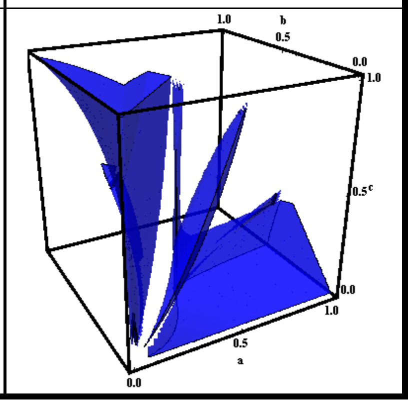
捌、研究結論

一、兩人槍手賽局中，我們利用樹狀圖或幾何的方式，計算出兩人的最佳策略及勝率:

1.槍手選擇射擊的勝率較不射擊的勝率大。且槍手 A, B (A 先射擊)的勝率值如下: $P_{Awin}=\dfrac{a}{1-(1-a)(1-b)}$　$P_{Bwin}=\dfrac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)}$

2.假使可以選擇射擊順序，則選擇先射的勝率較選擇後射的勝率大。

二、三人槍手賽局中，我們利用**轉移矩陣**計算勝率值，比較後建構出三人槍手賽局的全決策盒。而下表為三槍手選擇該策略的區域圖形:

A 射擊 B	A 射擊 C	A 不射擊
		
B 射擊 A	B 射擊 C	B 不射擊
		
C 射擊 A	C 射擊 B	C 不射擊
		

三、三人槍手賽局中，引進**全決策盒**的概念後，將三人槍手賽局的結果推演到不完全資訊賽局的策略選擇如下:

1.缺乏所有槍手(含自身)命中率訊息:

(1)槍手 A

<table>
<tr><td rowspan="2">策略訊息
不公開</td><td colspan="5">策略訊息公開</td></tr>
<tr><td>第一回合</td><td colspan="4">第一回合後</td></tr>
<tr><td rowspan="4">A 射 C</td><td rowspan="4">A 射 C</td><td></td><td>C 射 A</td><td>C 射 B</td><td>C 不射</td></tr>
<tr><td>B 射 A</td><td>射 B</td><td>射 B</td><td>射 B</td></tr>
<tr><td>B 射 C</td><td>射 C</td><td>不射</td><td>射 B</td></tr>
<tr><td>B 不射</td><td>射 C</td><td>無</td><td>無</td></tr>
</table>

(2)**槍手 B**

<table>
<tr><td rowspan="2">策略訊息
不公開</td><td colspan="5">策略訊息公開</td></tr>
<tr><td>第一回合</td><td colspan="4">第一回合後</td></tr>
<tr><td rowspan="4">B 射 C</td><td rowspan="4">A 射 B: B 射 A
A 射 C: B 射 A
A 不射: B 射 C</td><td></td><td>C 射 A</td><td>C 射 B</td><td>C 不射</td></tr>
<tr><td>B 射 A</td><td>射 A</td><td>射 C</td><td>射 A</td></tr>
<tr><td>B 射 C</td><td>不射</td><td>射 C</td><td>射 A</td></tr>
<tr><td>B 不射</td><td>射 C</td><td>射 C</td><td>無</td></tr>
</table>

(3)**槍手 C**

<table>
<tr><td rowspan="2">策略訊息
不公開</td><td colspan="5">策略訊息公開</td></tr>
<tr><td>第一回合</td><td colspan="4">第一回合後</td></tr>
<tr><td rowspan="4">C 射 A</td><td rowspan="4">同右表</td><td></td><td>C 射 A</td><td>C 射 B</td><td>C 不射</td></tr>
<tr><td>B 射 A</td><td>不射</td><td>不射</td><td>射 A</td></tr>
<tr><td>B 射 C</td><td>射 A</td><td>射 A</td><td>射 A</td></tr>
<tr><td>B 不射</td><td>無</td><td>射 B</td><td>無</td></tr>
</table>

2.缺乏其他槍手(不含自身)命中率訊息:

(1)**槍手 A**

<table>
<tr><td rowspan="2">策略訊息
不公開</td><td colspan="5">策略訊息公開</td></tr>
<tr><td>第一回合</td><td colspan="4">第一回合後</td></tr>
<tr><td rowspan="4">a < 0.56:
A 不射
a > 0.56:
A 射 C</td><td rowspan="4">(0.00, 0.56):
A 不射
(0.56, 1):
A 射 C</td><td></td><td>C 射 A</td><td>C 射 B</td><td>C 不射</td></tr>
<tr><td>B 射 A</td><td>(0.00, 0.36):射 B
(0.36, 0.52):射 C
(0.52, 1]:射 B</td><td>(0.00, 0.50):射 B
(0.50, 1]-射 C</td><td>A 射 B</td></tr>
<tr><td>B 射 C</td><td>(0.00, 0.35):射 C
(0.35, 0.54):射 B
(0.54, 1):射 C
a=1:不發生</td><td>A 不射</td><td>(0.00, 0.38):射 B
(0.38, 1]:不發生</td></tr>
<tr><td>B 不射</td><td>射 C</td><td>不發生</td><td>不發生</td></tr>
</table>

(2)槍手 B

<table>
<tr><td rowspan="2">策略訊息
不公開</td><td colspan="6">策略訊息公開</td></tr>
<tr><td colspan="2">第一回合</td><td colspan="4">第一回合後</td></tr>
<tr><td rowspan="4">B 射 C</td><td rowspan="2">A
射
B</td><td rowspan="2">(0.00, 0.17):
B 射 A
(0.17, .37):
B 射 C
(0.37, .79):
B 射 A
(0. 79, 1]:
B 射 C</td><td></td><td>C 射 A</td><td>C 射 B</td><td>C 不射</td></tr>
<tr><td>A 射 B</td><td>(0.00, 0.38):射 C
(0.38, 0.79):射 A
(0.79, 1]:不射</td><td>射 C</td><td>(0.00, 0.42):射 A
(0.42, 1]:射 C</td></tr>
<tr><td>A
射
C</td><td>B 射 C</td><td>A 射 C</td><td>(0.00, 0.67):不射
(0.67, 1):射 C
b=1:不發生</td><td>(0.00, 1):射 C
b=1:不發生</td><td>(0.00, 0.12):射 A
(0.12, 1]:無</td></tr>
<tr><td>A
不射</td><td>B 射 C</td><td>A 不射</td><td>(0.00, 0.20):不發生
(0.20, 0.33):射 C
(0.33, 0.35):不發生
(0.35, 0.38):射 C
(0.38, 1]:不發生</td><td>射 C</td><td>不發生</td></tr>
</table>

(2)槍手 C

<table>
<tr><td rowspan="2">策略訊息
不公開</td><td colspan="5">策略訊息公開</td></tr>
<tr><td>第一回合</td><td colspan="4">第一回合後</td></tr>
<tr><td rowspan="4">c < 0.29:
C 射 B
c > 0.29:
C 射 A</td><td rowspan="4">同右表</td><td></td><td>B 射 A</td><td>B 射 C</td><td>B 不射</td></tr>
<tr><td>B 射 A</td><td>(.00, .24):不射
(.24, 1]:射 A</td><td>(.00, .30):射 B
(.30, .65):射 A
(.65, 1]:不射</td><td>(.00, .21):不發生
(.21, 1]:射 A</td></tr>
<tr><td>B 射 C</td><td>(.00, .37):射 A
(.37, 1]:不射</td><td>射 A</td><td>射 A</td></tr>
<tr><td>B 不射</td><td>不發生</td><td>射 B</td><td>不發生</td></tr>
</table>

四、將全決策盒推廣到一般賽 局的全決策空間，提供了賽局理論一種新的討論方式，將可同時完成完全信息賽局及不完全信息賽局的分析。

玖、應用

一、「賽局理論」所講的並非是比賽，而是我們每日與人互動的策略，面對人與人之間各種競爭和衝突時，找到最佳的因應策略。例如：現實生活中，許多企業競爭激烈，我們可以在理想化的情況下，建立如槍手問題的策略模型，若不考慮時間效應及民眾反映，則各企業輪流出招時，便可依照模型計算出最佳的策略。

二、近幾年全球暖化的問題十分嚴重，資源的耗竭，讓大家不得不重視環境問題。如何演化出和自然界的合作關係，這是賽局理論的另一個層面。我們可以用「槍手問題」的概念，去剖析這些現象出現的成因，尋找線索，解決或改善這樣的困境，建立合作的機智。

三、賽局的問題，在生活上俯拾皆是，例如:石油調漲引起的民怨，業者會用甚麼方式回應，消基會又會用甚麼方式捍衛民眾權益等等，我們不是專家，但我們可以利用槍手問題中，輪流射擊出招的概念去分析並知悉事情的本質，避免盲從或徬徨，理性的思考分析各種行動。

拾、未來展望

一、我們希望能討論當槍手人數增加時，槍手們的選擇有哪些共通性或規律。

二、實際將決策空間的概念應用在形形色色的賽局中。試著尋找更多隱藏在決策空間中尚未發現的資訊。

三、改變槍手賽局的遊戲規則(例如:增加槍手們的射擊次數、改變槍手承受重槍次數等等)，對於更複雜的賽局進行分析。

拾壹、參考資料

一、Len Fisher。剪刀、石頭、布：生活中的賽局理論。天下文化。2009

二、Roger A. McCain。Game Theory, a Non-Technical Introduction to the Analysis of Strategy。智勝文化。2008

三、姚景星、劉睦雄。1976。賽局淺說。數學傳播。第一卷第三期

四、胡均立。2006。賽局論的智慧---分析策略與權勢的學問

附錄 1 **馬可夫鏈簡介**

1.馬可夫鏈: 由俄國數學家馬可夫(Andrei Andreyevich Markov)於 1907 年提出。

假如給定一個由全部狀態構成的集合 $S=\{S_1,S_2,...,S_n\}$，過程從其中任一狀態開始，在每一個步驟中，都有可能轉移到另一個狀態。我們將一個狀態 S_i 經過一個操作後，轉變到狀態 S_j 的機率記作 P_{ij}，稱作*轉移機率*。當給定現在及過去所有狀態，假如下一狀態僅和現在狀態有關，稱為*馬可夫性質*。滿足以上敘述的隨機過程稱為*馬可夫鏈*。

將轉移機率以矩陣呈現如下 (此矩陣稱為*轉移矩陣*，其中每列元素和為 1):

$$
P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \text{狀態 } 1 \\ \text{狀態 } 2 \\ \quad\vdots \\ \text{狀態 } n \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \text{當} \\ \text{下} \\ \text{步} \\ \text{驟} \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc} \text{狀} & \text{狀} & & \text{狀} \\ \text{態} & \text{態} & \cdots & \text{態} \\ 1 & 2 & & n \end{array}
$$

下一步驟

且經過 k 階段後的馬可夫鏈機率分配 $v^k = v^{(k-1)} P$。

2.吸收狀態: 若 P 中某些對角線元素為 1 時，稱之為*吸收型馬可夫鏈*。也就是說一旦進入了某些狀態，便停留在該狀態內，這種狀態稱為*吸收狀態*。

3.吸收型馬可夫鏈:

定義: 若一馬可夫鏈同時滿足以下兩條件，則稱之為吸收型馬可夫鏈。

(1)含有至少一個吸收狀態。

(2)事件在任何非吸收狀態，經過有限期後之後都會達到吸收狀態。

為了做更完整的分析，將馬可夫鏈整理如下: 其中 I,O,Q,R 皆為矩陣。

$$P = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{R} & \mathrm{Q} \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{吸收狀態} \\ \\ \text{非吸收狀態} \end{array}$$

I 為單位矩陣 $I_{ij}\begin{cases}1\ , \text{ when } i=j \\ 0\ , \text{ when } i\neq j\end{cases}$

O 為零矩陣 $I_{ij}=0$

I,Q 為方陣

則 $P^n = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{R+QR+Q^2R+\cdots+Q^nR} & \mathrm{Q}^n \end{array}\right]$

因為 $\left(\mathrm{I\text{-}Q}\right)\left(\mathrm{I+Q+Q^2+\cdots+Q}^n\right)=\mathrm{I\text{-}Q}^n$

當 n 趨近無窮大時　$\mathrm{I\text{-}Q}^n \to \mathrm{O}$

$=>\left(\mathrm{I+Q+Q^2+L+Q}^n\right)=\left(\mathrm{I\text{-}Q}\right)^{-1}$

故 $P^n = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{R}\left(\mathrm{I\text{-}Q}\right)^{-1} & \mathrm{O} \end{bmatrix}$

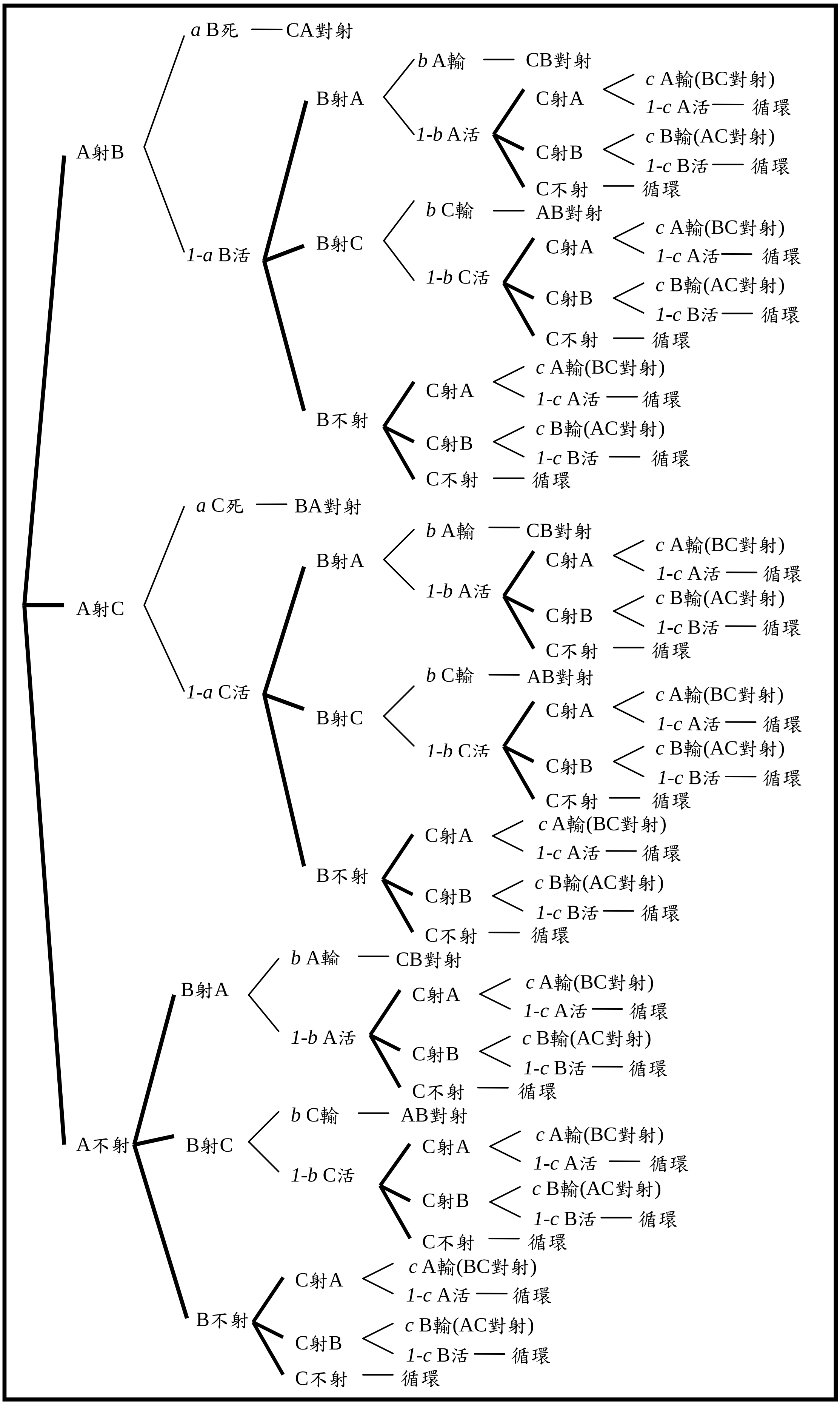
$\mathrm{N}=\left(\mathrm{I}-Q\right)^{-1}$ 稱為馬可夫鏈的基本矩陣，則有以下特性:

a.矩陣 N 中元素 n_{ij} 表示由非吸收狀態 i 開始，在被吸收前停留在非吸收狀態 j 的平均次數。

b.令 B = NR，B 矩陣中元素 b_{ij} 表示由非吸收狀態 i 開始，被吸收狀態 j 吸收的機率。

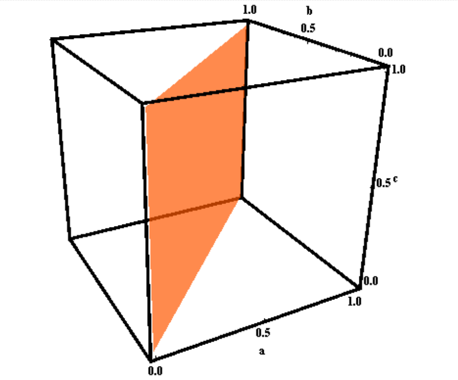
c.令 t= Ne (e 為所有元素皆為 1 的行向量)，則向量 t 中的元素 t_i 表示從非吸收狀態 i 開始，在被吸收狀態吸收前所經過非吸收狀態總次數平均值。

附錄 2　三人賽局之樹狀圖

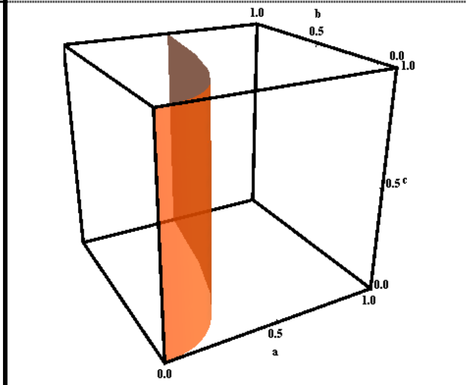


附錄 3　函數定義及其在決策盒中之圖形

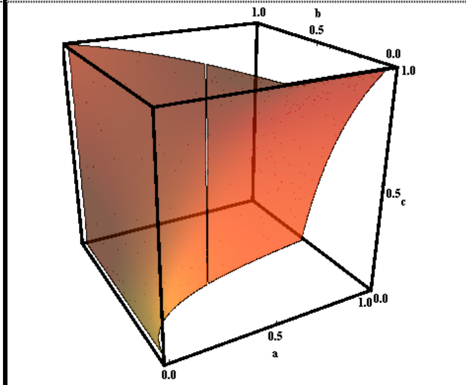
$$f_1 \equiv a-b$$



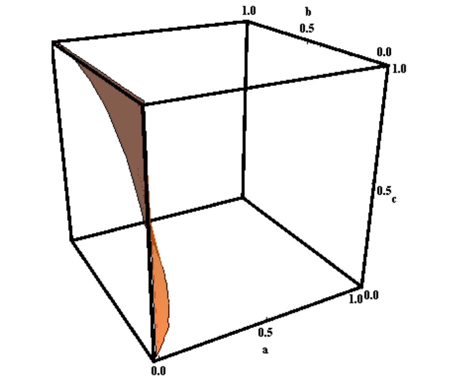
$$f_2 \equiv b-\frac{a^2}{\bar{a}^2}$$



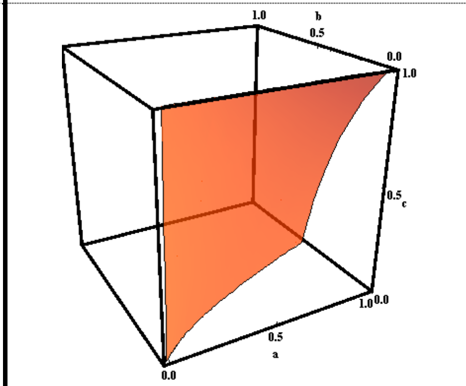
$$f_3 \equiv c-\frac{a^2\bar{b}^2-ab^2}{a^2\bar{b}-b\bar{a}^2\bar{b}}$$



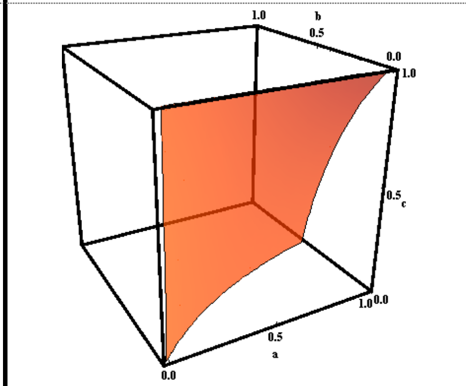
$$f_4 \equiv c-\frac{\bar{a}^2b^2-ab}{\bar{a}^2b^2+a^2\bar{b}}$$



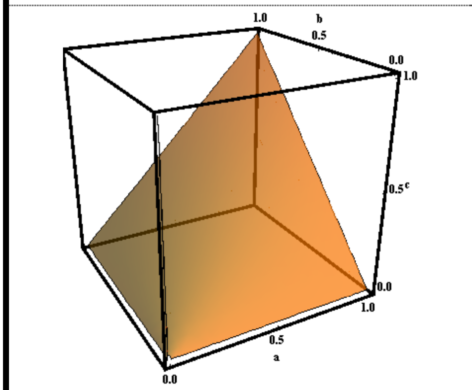
$$f_5 \equiv c-\frac{a^2\bar{b}-a\bar{a}b^2-ab}{\bar{a}^2b^2+a^2\bar{b}}$$



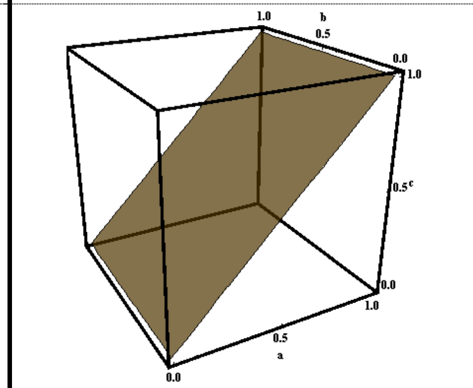
$$f_6 \equiv c-\frac{a\bar{b}-b}{a\bar{b}}$$



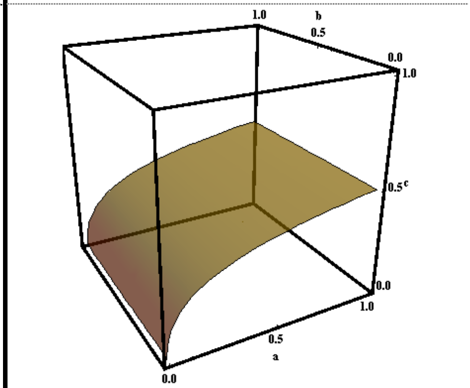
$$f_7 \equiv \bar{a}\bar{b}bc^2+\bar{a}bc+a\left(c-b\right)$$



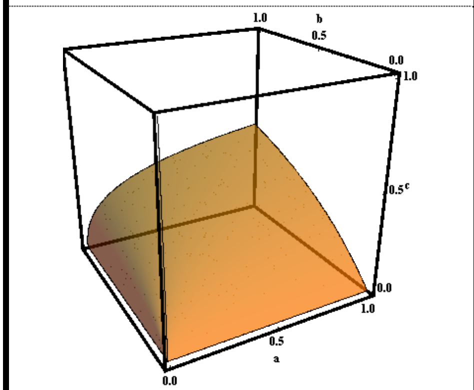
$$f_8 \equiv a-c$$



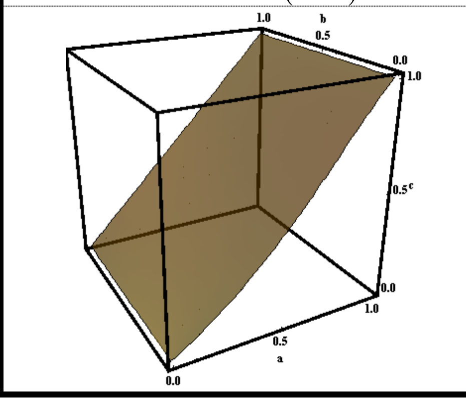
$$f_9 \equiv a-\frac{c^2}{\bar{c}^2}$$



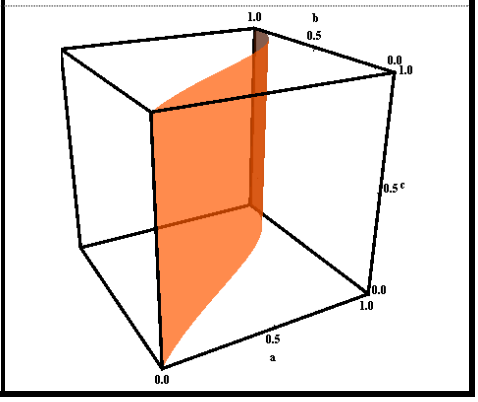
$$f_{10} \equiv -\bar{a}bc^2+ab\bar{c}-ac$$



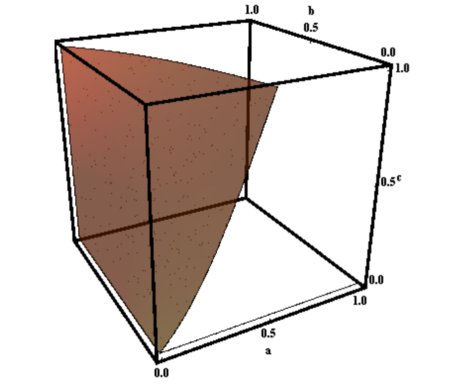
$$f_{11} \equiv \bar{a}^2\bar{b}^2c^2+\bar{a}b^2c+\bar{a}^2bc+\bar{a}bc-a^2\bar{b}+a\left(c-b\right)$$



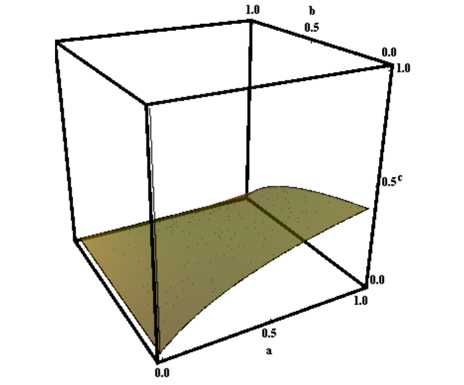
$$f_{12} \equiv a-\frac{b}{b^2-b+1}$$



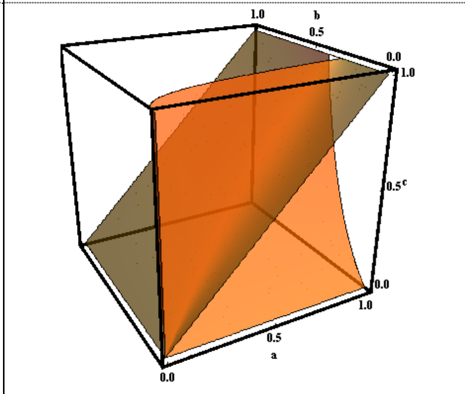
$$f_{13} \equiv \bar{a}^2\bar{b}^2bc^2 + b^2c^2 + 2a^2b^2c - \bar{a}^2b^3c - 3ab^2c + a\bar{b}c^2 + a\bar{a}b(b+c) + a^2b + bc^2$$



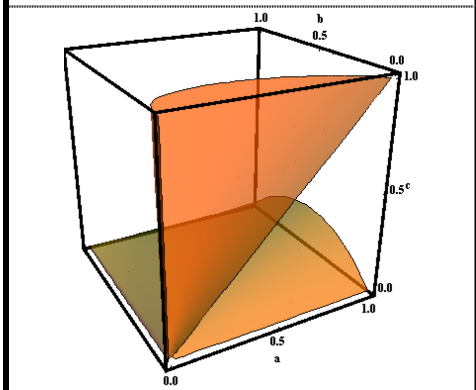
$$f_{14} \equiv a^2b\bar{c}^2 + \bar{a}bc^2 - a^2\bar{c}^2 + ac$$



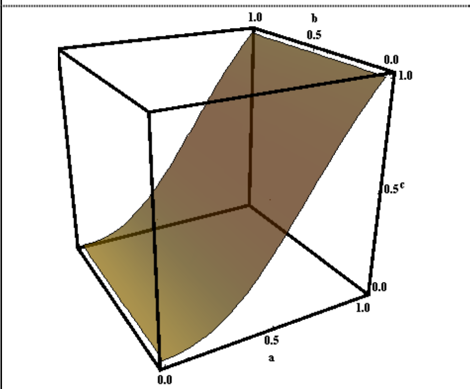
$$f_{15} \equiv \bar{a}^2b\bar{b}^2c^2 - a\bar{a}b\bar{b} + c^2(a-b) + 2a^2b^2c + a\bar{a}bc + 2abc^2 + ab - 3abc(b+c) - \bar{a}^2b^3c$$



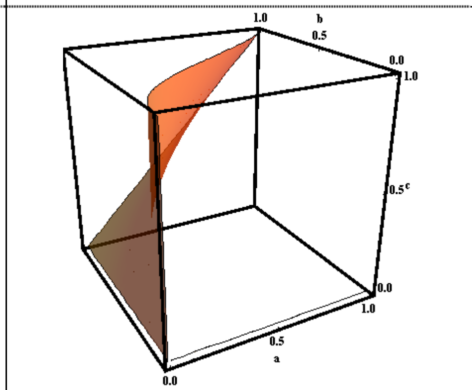
$$f_{16} \equiv -\bar{a}^2b\bar{b}c^2 - a\bar{a}c^2 - a^2b\bar{b} - a^2b^2c + bc(a+c)$$



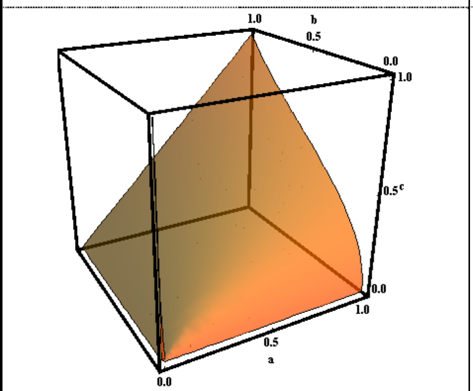
$$f_{17} \equiv c - \frac{a^2}{(a^2 - a + 1)}$$



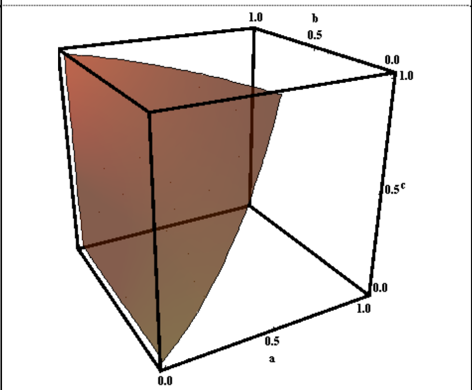
$$f_{18} \equiv a\bar{b}^2c - b^2c + ab$$



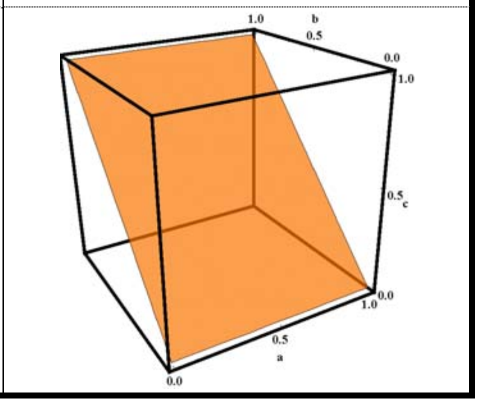
$$f_{19} \equiv a\bar{b}^2c^2 + b\bar{b}c^2 + b(c-a)$$



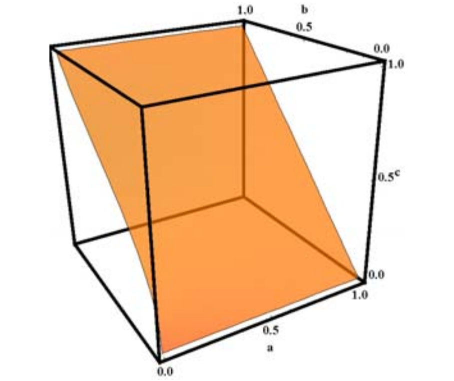
$$f_{20} \equiv \bar{a}\bar{b}c - a$$



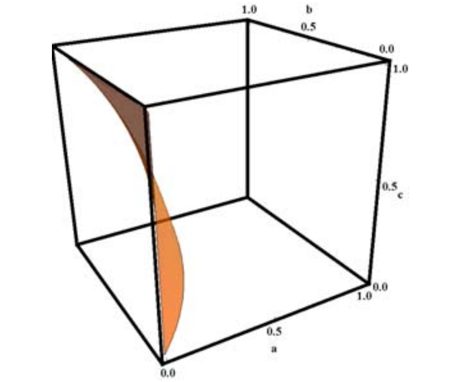
$$f_{21} \equiv b - c$$



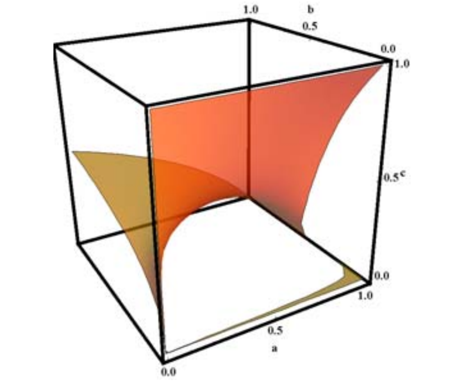
$$f_{22} \equiv abc^2 - bc^2 - ac^2 + c^2 - abc + bc + ac - b$$



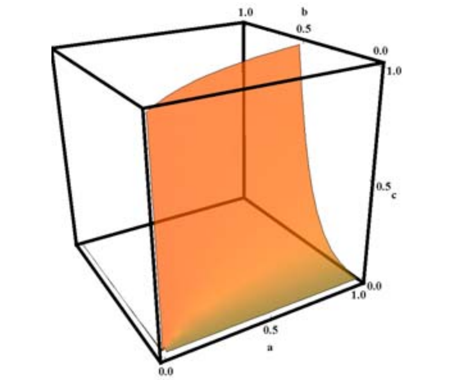
$$f_{23} \equiv b - \frac{a}{(1-a)(1-c)}$$



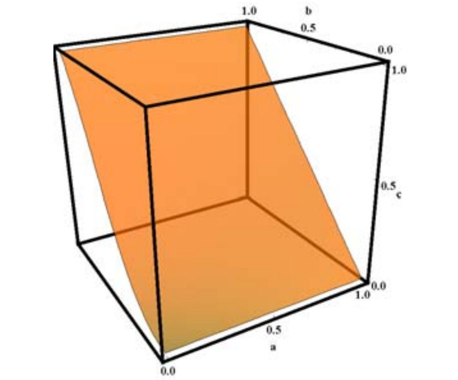
$$f_{24} \equiv ab^2c^2 - b^2c^2 - 2abc^2 + bc^2 + ac^2 - 2ab^2c + 2b^2c + 2abc - ac + ab^2 - b^2$$



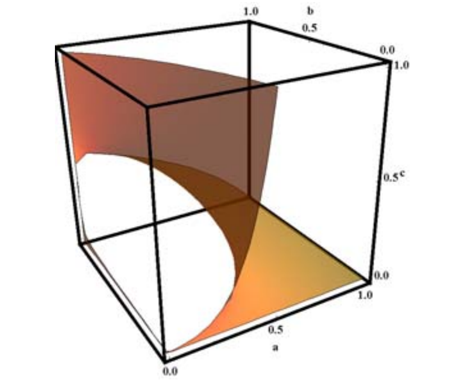
$$f_{25} \equiv ab^2c - abc - bc + ac - ab^2$$



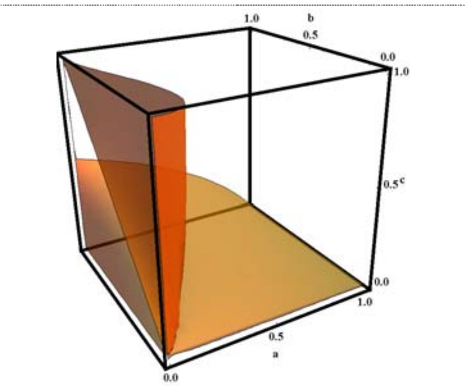
$$f_{26} \equiv ab^2c - b^2c - abc + bc - c - ab^2 + b^2 + ab$$



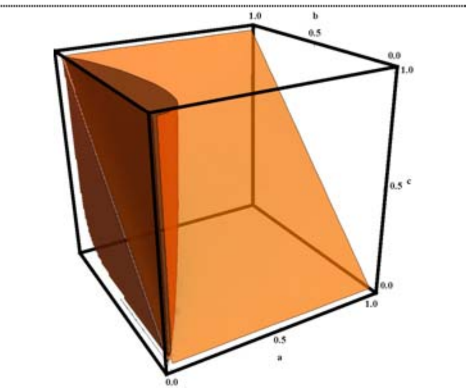
$$f_{27} \equiv a^2bc^2 - 2abc^2 + bc^2 - a^2c^2 + 2ac^2 - c^2 - 2a^2bc + 2abc + a^2c + a^2b - ab$$



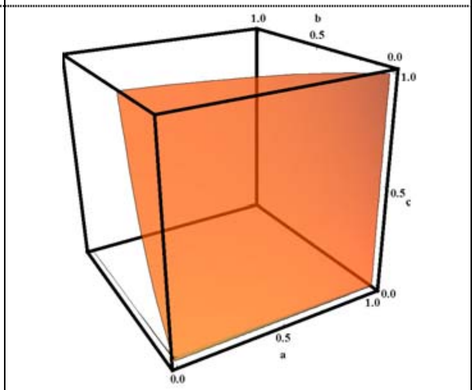
$$f_{28} \equiv 2a^2b^2c^2 - 3ab^2c^2 + b^2c^2 - 3a^2bc^2 + 3abc^2 - bc^2 + a^2c^2 - a^2b^3c + 2ab^3c - b^3c - ab^2c + b^2c + abc + a^2b^2 - ab^2$$



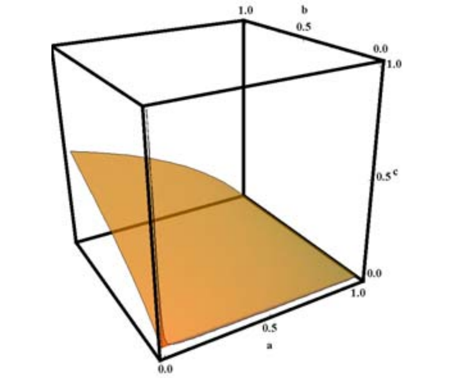
$$f_{29} \equiv a(2a^3b^2c^2 - 5a^2b^2c^2 + 4ab^2c^2 - b^2c^2 - 3a^3bc^2 + 6a^2bc^2 + ab^2 - 4abc^2 + bc^2 + a^3c^2 - a^2c^2 - a^3b^3c + 3a^2b^3c - 3ab^3c + a^2b + b^3c + a^3b^2c - 3a^2b^2c + 3ab^2c - b^2c + a^2bc - abc - a^2c - a^2b^2)$$



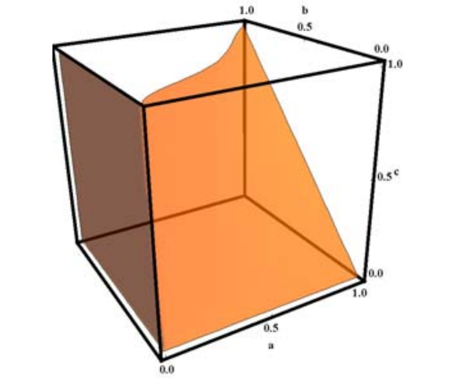
$$f_{30} \equiv ab^2c^2 - b^2c^2 - 2abc^2 + 2bc^2 + ac^2 - c^2 - ab^2c + bc + ab^2$$



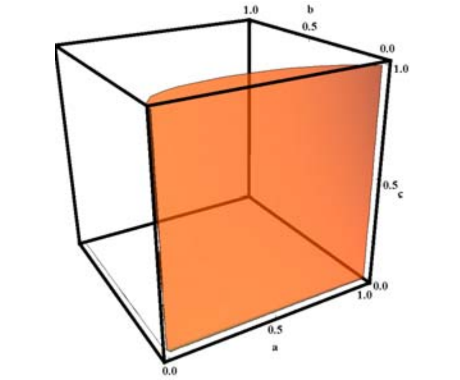
$$f_{31} \equiv ab^2c^2 - b^2c^2 - 2abc^2 + bc^2 + ac^2 - ab^2c + b^2c + bc + ab^2 - b^2$$



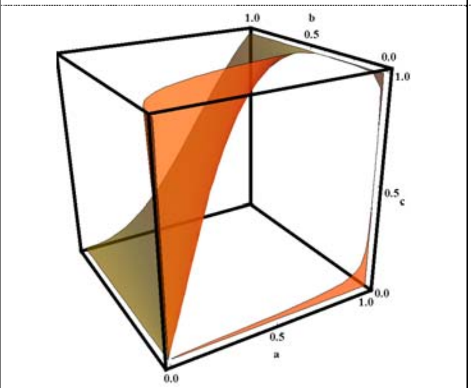
$$f_{32} \equiv a(a^3b^2c^2 - 2a^2b^2c^2 + ab^2c^2 - 2a^3bc^2 + 4a^2bc^2 - 2abc^2 + a^3c^2 - 2a^2c^2 + ac^2 - a^3b^3c + 3a^2b^3c - 3ab^3c + b^3c + 3a^3b^2c - 9a^2b^2c + 8ab^2c - 2b^2c - 2a^3bc + 4a^2bc - 2abc + a^2c - a^3b^2 + 3a^2b^2 - 2ab^2 + a^3b - 2a^2b)$$



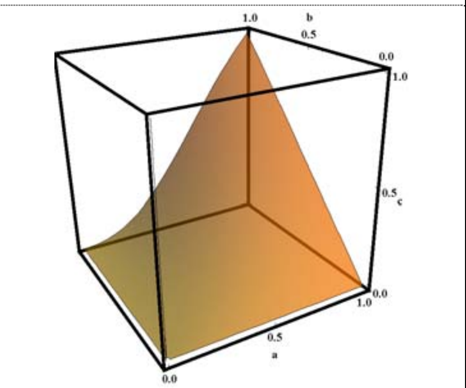
$$f_{33} \equiv a^2b^2c^2 - ab^2c^2 - 2a^2bc^2 + 2abc^2 a^2c^2 - ac^2 - a^2b^3c + 2ab^3c - b^3c + 2a^2b^2c - 5ab^2c + 2b^2c - a^2bc + 2abc + ab^2$$



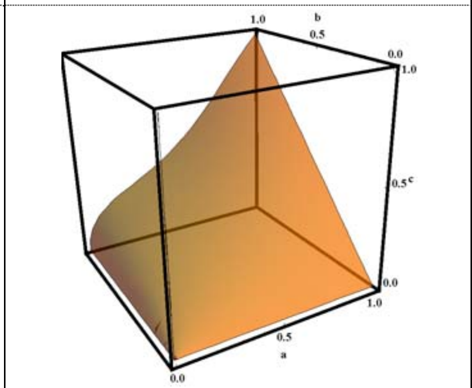
$$f_{34} \equiv a^2bc^2 - abc^2 - a^2c^2 + ac^2 - a^2b^2c + 2ab^2c - b^2c - abc + a^2b$$



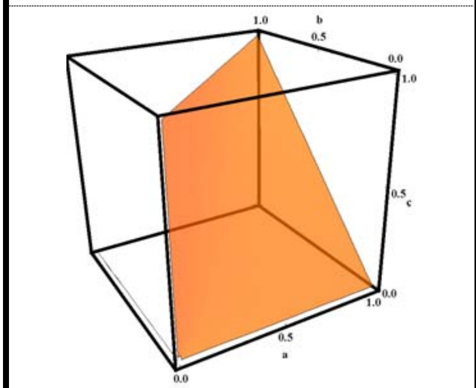
$$f_{35} \equiv a^2bc - 2abc + bc + ac - a^2b$$



$$f_{36} \equiv a^3b^2c^2 - 2a^2b^2c^2 + ab^2c^2 - 2a^2bc^2 + 3abc^2 - bc^2 + a^3b^2 + a^2c^2 - ac^2 - 2a^3b^2c - a^2c + 4a^2b^2c - 2ab^2c + a^2bc - abc - 2a^2b^2 + ab^2 + a^2b$$

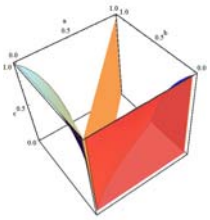
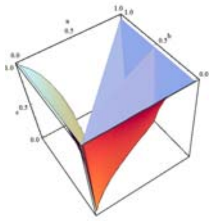
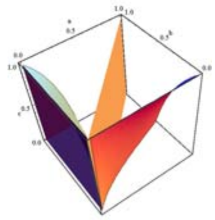
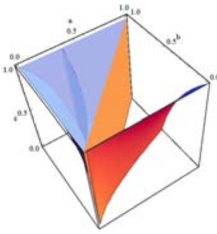


$$f_{37} \equiv a^2b^2c - ab^2c - abc + bc - ac - a^2b^2 + ab^2 + ab$$

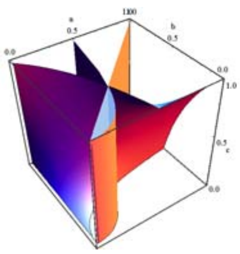
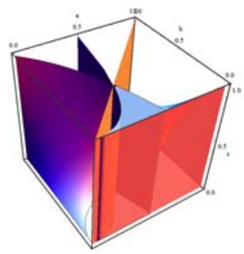
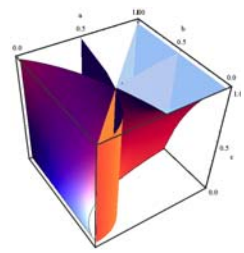
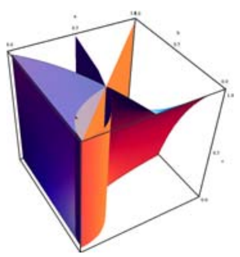
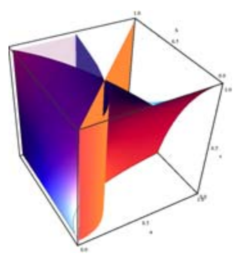
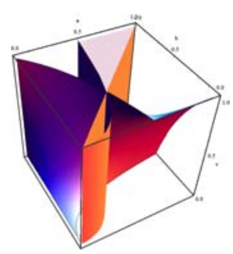


附錄 4　三人對射時，當已知 **A, B** 的策略時，**C** 在不同命中率條件下的最佳策略:

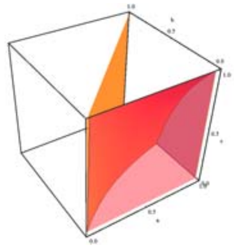
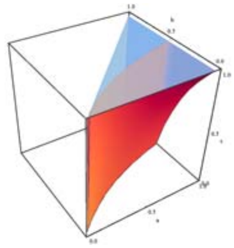
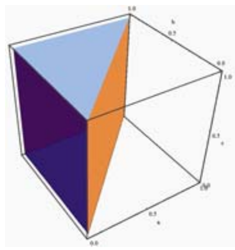
1. A 射 B, B 射 A (策略(1)～策略(3))

命中率的範圍	$f_1>0$		$f_1<0$	
	$f_5<0$	$f_5>0$	$f_4<0$	$f_4>0$
命中率範圍的對應圖形				
槍手 C 的最佳策略	**策略(3): C 不射**	**策略(1): C 射 A**	**策略(2): C 射 B**	**策略(3): C 不射**

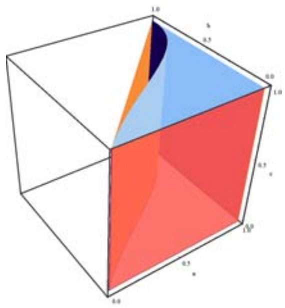
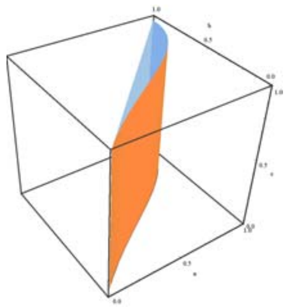
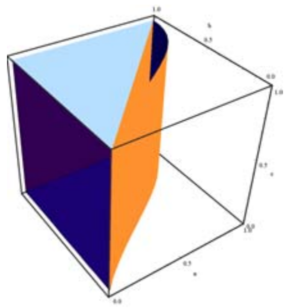
2. A 射 B , B 射 C (策略(4)～策略(6))

命中率的範圍	$f_1>0$		
	$f_2>0$	$f_2<0$	
		$f_3<0$	$f_3>0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 C 的最佳策略	**策略(4): C 射 A**	**策略(6): C 不射**	**策略(4): C 射 A**
命中率的範圍	$f_1<0$		
	$f_2>0$		$f_2<0$
	$f_3>0$	$f_3<0$	
命中率範圍的對應圖形			
槍手 C 的最佳策略	**策略(5): C 射 B**	**策略(5): C 射 B**	**策略(6):C 不射**

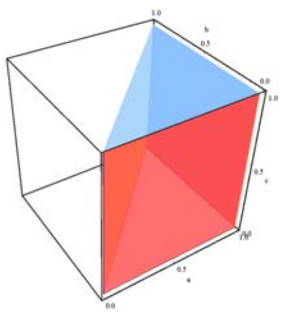
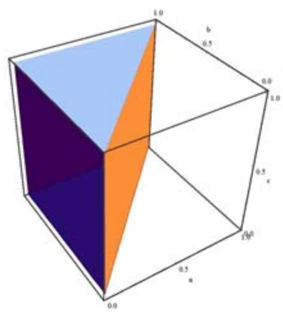
3. A 射 B, B 不射 (策略(7)～策略(9))

命中率的範圍	$f_6 < 0$	$f_6 > 0 \wedge f_1 > 0$	$f_1 < 0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 C 的最佳策略	**策略(9): C 不射**	**策略(7): C 射 A**	**策略(9): C 不射**

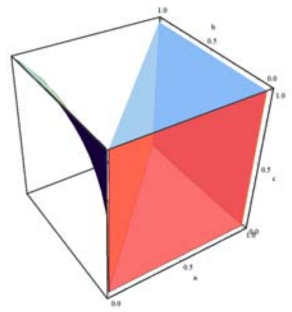
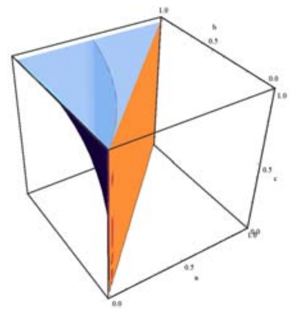
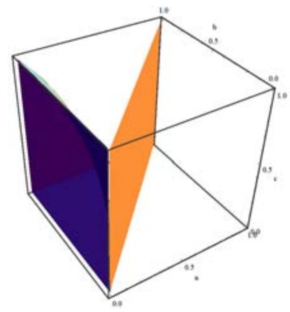
4. A 射 C, B 射 A (策略(10)～策略(12))

命中率的範圍	$f_{12} > 0$	$f_{12} < 0 \wedge f_1 > 0$	$f_1 < 0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 C 的最佳策略	**策略(10): C 射 A**	**策略(12): C 不射**	**策略(10): C 射 A**

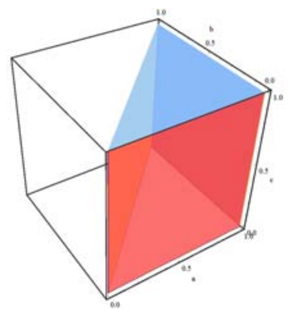
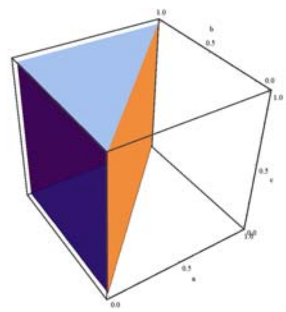
5. A 射 C, B 射 C (策略(13)～策略(15)) & A 射 C, C 不射 (策略(16)～策略(18))

命中率的範圍	$f_1 > 0$	$f_1 < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 C 的最佳策略	**策略(13): C 射 A**	**策略(14): C 射 B**
	策略(16): C 射 A	**策略(17): C 射 B**

6. A 不射, B 射 A (策略(19)～策略(21))

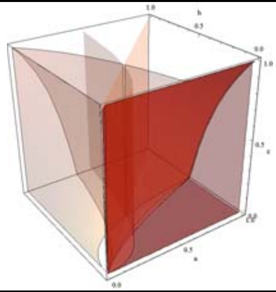
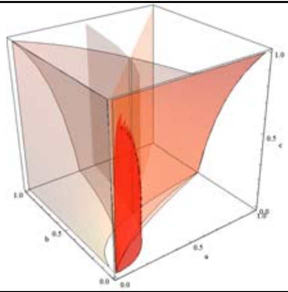
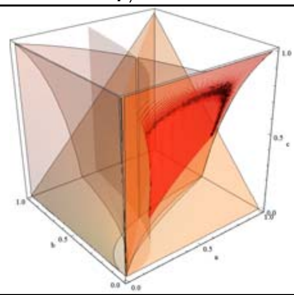
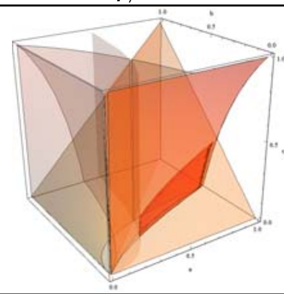
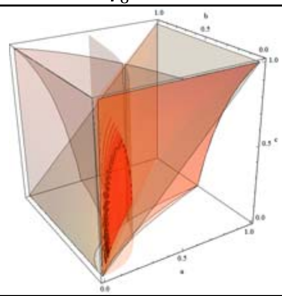
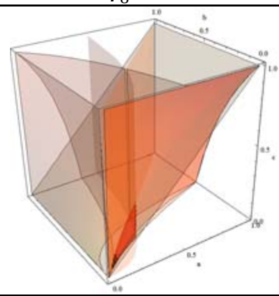
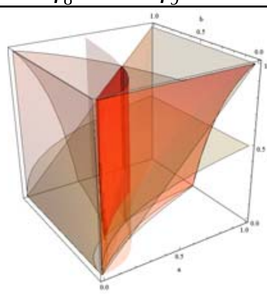
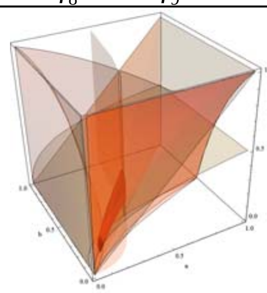
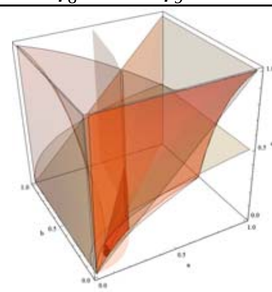
命中率的範圍	$f_1 > 0$	$f_{23} < 0 \wedge f_1 < 0$	$f_{23} > 0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 C 的最佳策略	**策略(21): C 不射**	**策略(21): C 不射**	**策略(20): C 射 B**

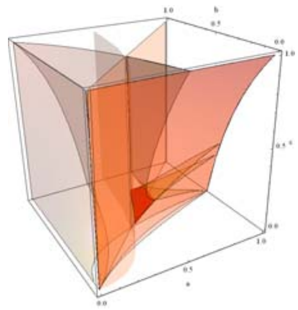
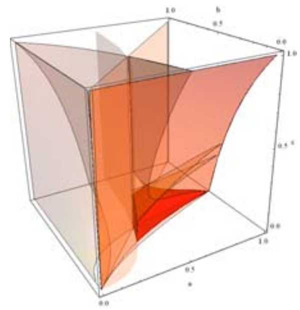
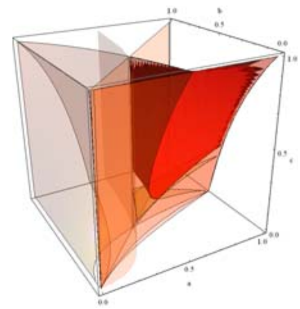
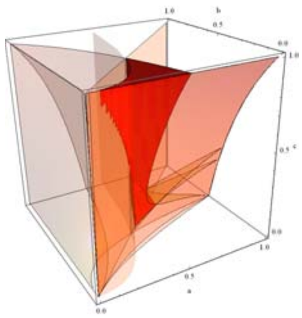
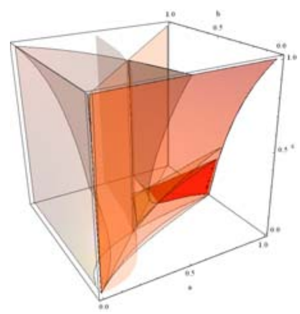
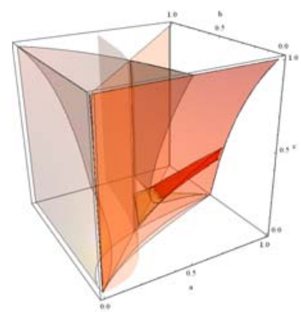
7. A 不射, B 射 C (策略(22)～策略(24)) & A 不射, B 不射(策略(25)～策略(27))

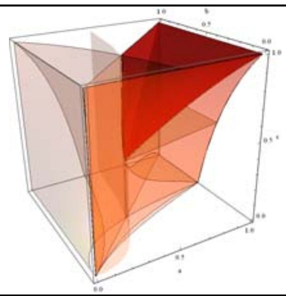
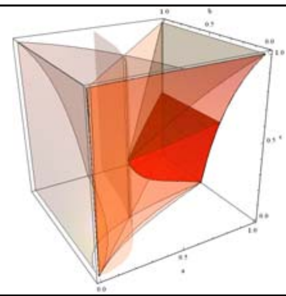
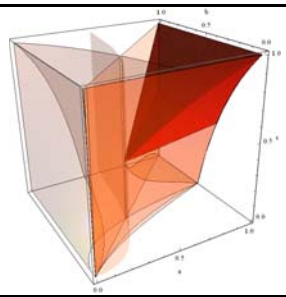
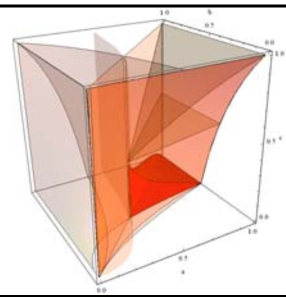
命中率的範圍	$f_1 > 0$	$f_1 < 0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 C 的最佳策略	**策略(22):C 射 A**	**策略(23):C 射 B**
	策略(25): C 射 A	**策略(26):C 射 B**

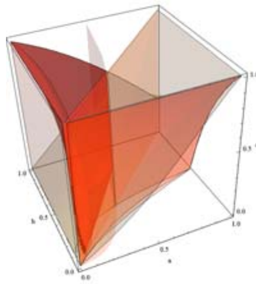
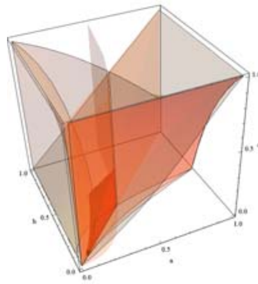
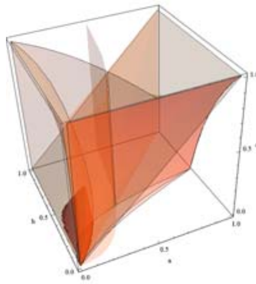
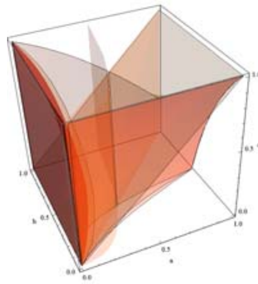
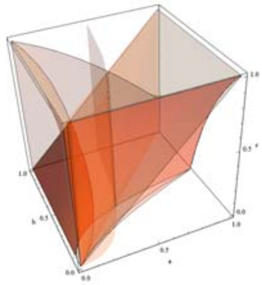
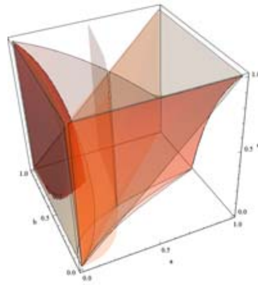
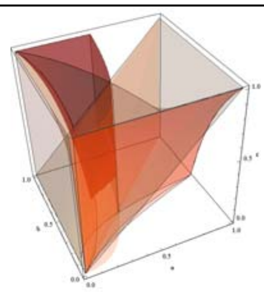
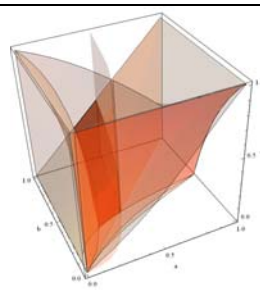
附錄 5　三人對射時，當已知 A 的策略時，B, C 在不同命中率條件下的最佳策略:

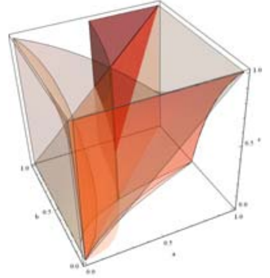
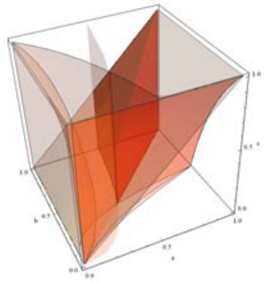
1. A 射 B (策略(1)～策略(9))

<table>
<tr><td>命中率
的範圍</td><td colspan="3">1.1　$f_2 < 0 \wedge f_5 < 0$</td><td colspan="3">1.2　$f_2 > 0 \wedge f_5 < 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>槍手 B, C
的最佳策略</td><td colspan="3">策略(3) : B 射 A, C 不射</td><td colspan="3">策略(1) : B 射 A, C 射 A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">命中率
的範圍</td><td colspan="6">1.3　$f_2 < 0 \wedge f_5 > 0 \wedge f_6 < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$f_7 > 0$</td><td colspan="3">$f_7 < 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>槍手 B, C
的最佳策略</td><td colspan="3">策略(4) : B 射 C, C 射 A</td><td colspan="3">策略(3) : B 射 A, C 不射</td></tr>
<tr><td rowspan="2">命中率
的範圍</td><td colspan="6">1.4　$f_2 > 0 \wedge f_5 > 0 \wedge f_6 < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$f_8 < 0$</td><td colspan="3">$f_8 > 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>槍手 B, C
的最佳策略</td><td colspan="3">策略(4) : B 射 C, C 射 A</td><td colspan="3">策略(1) : B 射 A, C 射 A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">命中率
的範圍</td><td colspan="6">1.5　$f_1 > 0 \wedge f_2 > 0 \wedge f_6 > 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f_8 < 0 \wedge f_9 < 0$</td><td colspan="2">$f_8 < 0 \wedge f_9 > 0$</td><td colspan="2">$f_8 > 0 \wedge f_9 > 0$</td></tr>
<tr><td>命中率範圍
的對應圖形</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>槍手 B, C
的最佳策略</td><td colspan="2">策略(4) : B 射 C, C 射 A</td><td colspan="2">策略(4) : B 射 C, C 射 A</td><td colspan="2">策略(1) : B 射 A, C 射 A</td></tr>
</table>

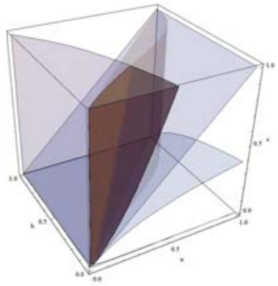
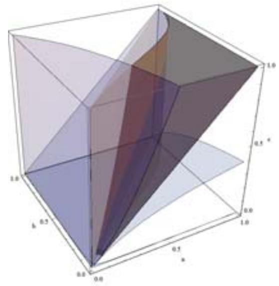
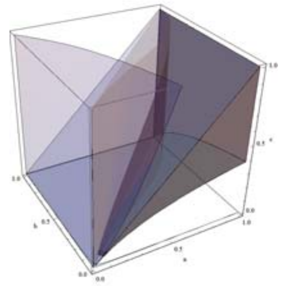
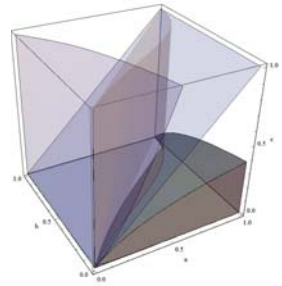
命中率的範圍	1.6　$f_2<0\wedge f_3<0\wedge f_6>0$		
	$f_7>0\wedge f_{10}>0\wedge f_{27}<0$	$f_7<0\wedge f_{10}>0\wedge f_{27}<0$	$f_7>0\wedge f_{10}<0\wedge f_{27}>0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(4) : B 射 C, C 射 A**	**策略(3) : B 射 A, C 不射**	**策略(7) : B 不射, C 射 A**
命中率的範圍	$f_7>0\wedge f_{10}<0\wedge f_{27}<0$	$f_7<0\wedge f_{10}>0\wedge f_{27}>0$	$f_7<0\wedge f_{10}<0\wedge f_{27}<0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(4) : B 射 C, C 射 A**	**策略(3) : B 射 A, C 不射**	**策略(7) : B 不射, C 射 A**

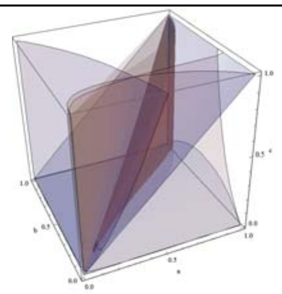
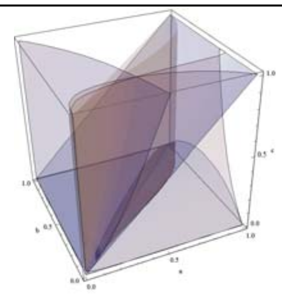
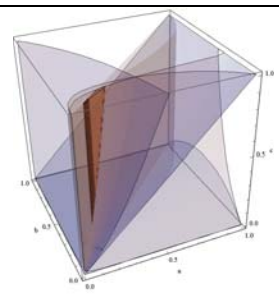
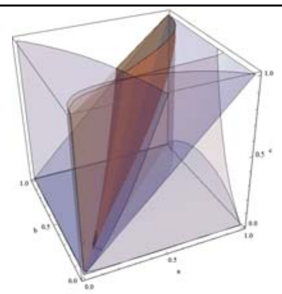
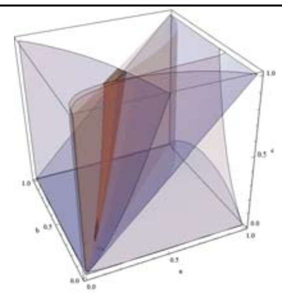
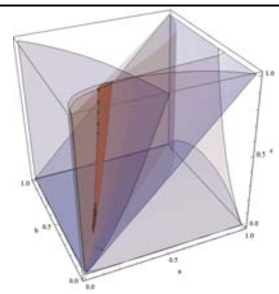
命中率的範圍	1.7　$f_1>0\wedge f_2<0\wedge f_3>0$	
	$f_8<0\wedge f_9<0\wedge f_{27}>0$	$f_8>0\wedge f_9>0\wedge f_{27}>0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(7) : B 不射, C 射 A**	**策略(1) : B 射 A, C 射 A**
命中率的範圍	$f_8>0\wedge f_9<0\wedge f_{27}>0$	$f_8>0\wedge f_9>0\wedge f_{27}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(7) : B 不射, C 射 A**	**策略(1) : B 射 A, C 射 A**

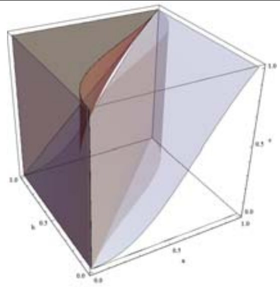
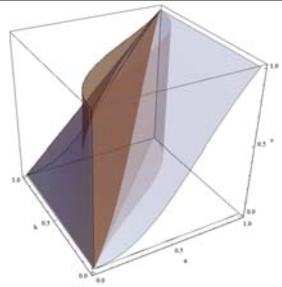
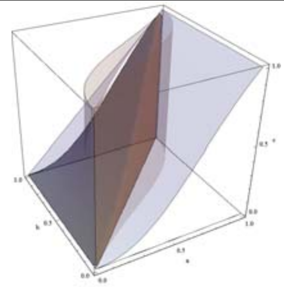
命中率 的範圍	1.8 $f_1<0 \wedge f_2>0 \wedge f_3>0 \wedge f_4>0$	
	$f_{11}>0$	$f_{11}<0$
命中率範圍 的對應圖形		
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(6) : B 射 C, C 不射**	**策略(2) : B 射 A, C 射 B**
命中率 的範圍	1.9 $f_3>0 \wedge f_4<0$	
	$f_8>0$	$f_8<0$
命中率範圍 的對應圖形		
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(2) : B 射 A, C 射 B**	**策略(5) : B 射 C, C 射 B**
命中率 的範圍	1.10 $f_3<0 \wedge f_4<0$	
	$f_8>0$	$f_8<0$
命中率範圍 的對應圖形		
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(2) : B 射 A, C 射 B**	**策略(5) : B 射 C, C 射 B**
命中率 的範圍	1.11 $f_2>0 \wedge f_3<0 \wedge f_4>0$	
	$f_{11}>0$	$f_{11}<0$
命中率範圍 的對應圖形		
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(6) : B 射 C, C 不射**	**策略(2) : B 射 A, C 射 B**

命中率的範圍	<u>1.12</u> $f_1<0\wedge f_2<0$	
	$f_8<0$	$f_8>0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(3) : B 射 A, C 不射**	**策略(6) : B 射 C, C 不射**

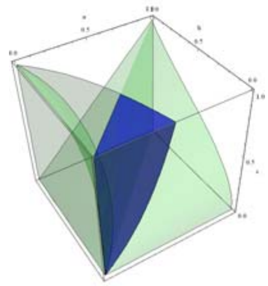
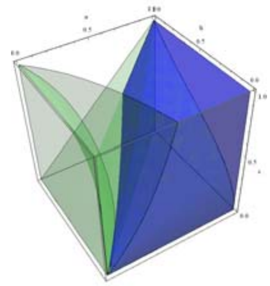
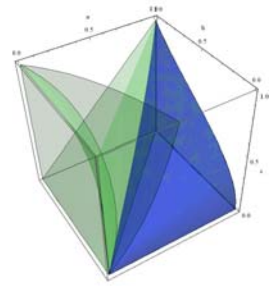
2．A 射 C 的情形

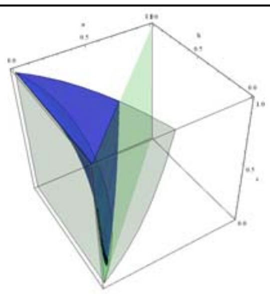
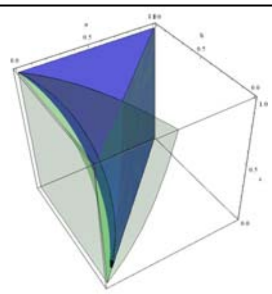
命中率的範圍	<u>2.1</u> $f_{12}>0$			
	$f_{13}<0$	$f_{13}>0\wedge f_8<0$	$f_8>0\wedge f_{14}>0$	$f_{14}<0$
命中率範圍的對應圖形				
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(13): B 射 C, C 射 A**	**策略(16): B 不射, C 射 A**	**策略(16): B 不射, C 射 A**	**策略(10): B 射 A, C 射 A**

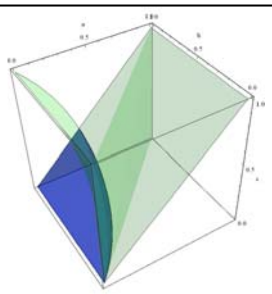
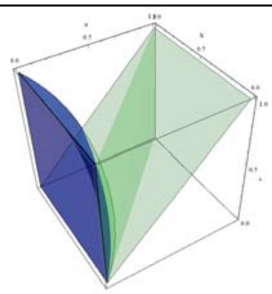
命中率的範圍	<u>2.2</u> $f_1>0\wedge f_{12}<0$		
	$f_{13}>0\wedge f_{15}>0\wedge f_{16}>0$	$f_{13}>0\wedge f_{15}>0\wedge f_{16}<0$	$f_{13}<0\wedge f_{15}>0\wedge f_{16}>0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(16): B 不射, C 射 A**	**策略(12): B 射 A, C 不射**	**策略(12): B 射 A, C 不射**
命中率的範圍	$f_{13}>0\wedge f_{15}<0\wedge f_{16}>0$	$f_{13}<0\wedge f_{15}<0\wedge f_{16}>0$	$f_{13}<0\wedge f_{15}<0\wedge f_{16}<0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(16): B 不射, C 射 A**	**策略(13): B 射 C, C 射 A**	**策略(13): B 射 C, C 射 A**

命中率的範圍	<u>2.3</u> $f_1<0$		
	$f_{18}<0$	$f_{18}>0\wedge f_{17}>0$	$f_{17}<0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(14): B 射 C, C 射 B**	**策略(12): B 射 A, C 不射**	**策略(12): B 射 A, C 不射**

3．A 不射的情形

命中率的範圍	<u>3.1</u> $f_1>0$		
	$f_{20}>0$	$f_{19}>0\wedge f_{20}<0$	$f_{19}<0$
命中率範圍的對應圖形			
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(22): B 射 C, C 射 A**	**策略(25): B 不射, C 射 A**	**策略(25): B 不射, C 射 A**

命中率的範圍	<u>3.2</u> $f_1<0\wedge f_{23}<0$	
	$f_{20}>0$	$f_{20}<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(21): B 射 A, C 不射**	**策略(23): B 射 C, C 射 B**

命中率的範圍	<u>3.3</u> $f_{23}>0$	
	$f_8>0$	$f_8<0$
命中率範圍的對應圖形		
槍手 B, C 的最佳策略	**策略(20): B 射 A, C 射 B**	**策略(21): B 射 C, C 射 B**

附錄 6　三人槍手賽局中，槍手們不同策略組合所對應到的勝率一般式

策略	槍手 A 勝率	槍手 B 勝率	槍手 C 勝率
(1)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}^2b^2}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}b\bar{b}c}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}^2c^2}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(2)	$\frac{a\bar{a}b}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a(a\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c)}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}^2b^2}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{ac}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}c(a\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c)}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(3)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}$	$\frac{\bar{a}^2b^2}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}$	$\frac{a\bar{a}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}+\frac{ac}{(1-\bar{a}\bar{b})}$
(4)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b(b\bar{c}+\bar{b}c)}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}c(b\bar{c}+\bar{b}c)}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{(1-\bar{a}\bar{b})c}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(5)	$\frac{a(a\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c)}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b^2\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b\bar{b}c\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}c(a\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c)}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{(1-\bar{a}\bar{b})c}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(6)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b\bar{b}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}+c$
(7)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}$	$\frac{\bar{a}bc}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}c^2}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}+\frac{ac}{(1-\bar{a}\bar{c})}$
(8)	$\frac{a(a\bar{c}+c\bar{a})}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}$	0	$\frac{ac}{(1-\bar{a}\bar{c})}+\frac{\bar{a}c(a\bar{c}+c\bar{a})}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}$
(9)	$\frac{a\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})}$	0	$\frac{c}{(1-\bar{a}\bar{c})}$
(10)	$\frac{a^2\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b(b\bar{c}+c\bar{b})}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}bc}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}\bar{b}c(b\bar{c}+c\bar{b})}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(11)	$\frac{a^2\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}\bar{b}c}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b^2\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b\bar{b}c\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}^2\bar{b}c^2}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}bc}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(12)	$\frac{a^2\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}$	$\frac{\bar{a}b^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b})}$	$\frac{\bar{a}bc}{(1-\bar{a}\bar{b})}$

(13)	$\frac{a\left(a\bar{b}+b\bar{a}\right)}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}b\bar{b}c}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}+\frac{\bar{a}b\left(a\bar{b}+b\bar{a}\right)}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}+\frac{ab}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}^2c^2}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}$
(14)	$\frac{a\left(a\bar{b}+b\bar{a}\right)}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}+\frac{a\bar{a}\bar{b}c}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}b\left(a\bar{b}+b\bar{a}\right)}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}+\frac{ab}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}^2\bar{b}c^2}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)\left(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right)}$
(15)	$\frac{a\left(a\bar{b}+b\bar{a}\right)}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)^2}$	$\frac{\bar{a}b\left(a\bar{b}+b\bar{a}\right)}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)^2}-\frac{ab}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)}$	0
(16)	$\frac{a^2\bar{b}}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}bc}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}+\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)}+\frac{ab}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}c^2}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$
(17)	$\frac{a\bar{a}c}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)^2}+\frac{a^2\bar{b}}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)}$	$\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)}+\frac{ab}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}^2c^2}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)^2}$
(18)	$\frac{a\bar{b}}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)}$	$\frac{b}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)}$	0
(19)	0	$\frac{b\left(b\bar{c}+c\bar{b}\right)}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)^2}$	$\frac{\bar{b}c\left(b\bar{c}+c\bar{b}\right)}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)^2}+\frac{bc}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$
(20)	$\frac{a\bar{b}c}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{b^2\bar{c}}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)^2}$	$\frac{b\bar{b}c\bar{c}}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)^2}+\frac{\bar{a}\bar{b}c^2}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}+\frac{bc}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$
(21)	0	$\frac{b\bar{c}}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{c}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$
(22)	$\frac{ab}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}b^2}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}+\frac{b\bar{b}c}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)^2}$	$\frac{\bar{b}^2c^2}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)^2}$
(23)	$\frac{ab}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}+\frac{a\bar{b}c}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}b^2}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}c^2}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$
(24)	$\frac{a}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)}$	$\frac{\bar{a}b}{\left(1-\bar{a}\bar{b}\right)}$	0
(25)	0	$\frac{b}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$	$\frac{\bar{b}c}{\left(1-\bar{b}\bar{c}\right)}$
(26)	$\frac{a}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)}$	0	$\frac{\bar{a}c}{\left(1-\bar{a}\bar{c}\right)}$
(27)	0	0	0

附錄７　三人不完全訊息槍手賽局中，槍手們的不完美最佳策略數據資料

※以下收錄數據為該策略成為最佳策略的機率。

※若三策略機率直接為 0，表示該情況下，此三策略皆不可能成為最佳策略。

1.若槍手 C 不知道槍手 A, B 的命中率，但知道過去槍手 A, B 的行動，問槍手 C 第一回合的不完美最佳策略。<討論 3-1>

(1)若已知 A 射 B，B 射 A:

命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	0.321086	0.129618	**0.549296**	0.6	**0.761132**	0.000000	0.238868
0.1	0.361960	0.136100	**0.501940**	0.7	**0.746629**	0.000000	0.253371
0.2	0.315839	0.145857	**0.538304**	0.8	**0.754502**	0.000000	0.245498
0.3	**0.782237**	0.116965	0.100798	0.9	**0.843808**	0.000000	0.156192
0.4	**0.986798**	0.000000	0.013202	1.0	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.5	**0.726563**	0.000000	0.273437				

(2)若已知 A 射 B，B 射 C

命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	0.000000	**1.000000**	0.000000	0.6	**0.549797**	0.000000	0.450203
0.1	0.005101	**0.986312**	0.008586	0.7	0.429889	0.000000	**0.570111**
0.2	0.133385	**0.792760**	0.073855	0.8	0.215415	0.000000	**0.784585**
0.3	0.383637	**0.385049**	0.231314	0.9	0.097476	0.000000	**0.902524**
0.4	**0.554778**	0.119579	0.325643	1.0	0.048589	0.000000	**0.951411**
0.5	**0.606746**	0.000000	0.393254				

(3)若已知 A 射 B，B 不射

命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.6	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.1	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.7	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.2	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.8	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.3	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.9	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.4	**1.000000**	0.000000	0.000000	1.0	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.5	**1.000000**	0.000000	0.000000				

(4)若已知 A 射 C，B 射 A

命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.6	0.000000	0.000000	**1.000000**
0.1	**0.997708**	0.000000	0.002292	0.7	0.000000	0.000000	**1.000000**
0.2	**0.992899**	0.000000	0.007101	0.8	0.000000	0.000000	**1.000000**
0.3	**0.975895**	0.000000	0.024105	0.9	0.000000	0.000000	**1.000000**
0.4	0.000000	0.000000	**1.000000**	1.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.5	0.000000	0.000000	**1.000000**				

(5)若已知 A 射 C，B 射 C

命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	**0.798105**	0.201895	0.000000	0.6	**0.753531**	0.246469	0.000000
0.1	**0.941203**	0.058797	0.000000	0.7	**0.680715**	0.319285	0.000000
0.2	**0.973089**	0.026911	0.000000	0.8	**0.630959**	0.369041	0.000000
0.3	**0.965538**	0.034462	0.000000	0.9	**0.598986**	0.401014	0.000000
0.4	**0.858507**	0.141493	0.000000	1.0	**0.603539**	0.396461	0.000000
0.5	**0.798105**	0.201895	0.000000				

(6)若已知 A 射 C，B 不射

命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.6	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.1	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.7	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.2	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.8	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.3	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.9	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.4	**1.000000**	0.000000	0.000000	1.0	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.5	**1.000000**	0.000000	0.000000				

(7)若已知 A 不射，B 射 A

對所有命中率值 c，都不可能有這種策略組合。

(8)若已知 A 不射，B 射 C

命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	0.000000	**1.000000**	0.000000	0.6	0.003764	**0.996236**	0.000000
0.1	0.000000	**1.000000**	0.000000	0.7	0.003828	**0.996172**	0.000000
0.2	0.000000	**1.000000**	0.000000	0.8	0.003358	**0.996642**	0.000000
0.3	0.000000	**1.000000**	0.000000	0.9	0.002192	**0.997808**	0.000000
0.4	0.000000	**1.000000**	0.000000	1.0	0.000000	**1.000000**	1.000000
0.5	0.003298	**0.996702**	0.000000				

(9)若已知 A 不射，B 不射

對所有命中率值 c，都不可能有這種策略組合。

2.若槍手 B 不知道槍手 A, C 的命中率，但知道過去槍手 A, C 的行動，問槍手 B 第一回合的不完美最佳策略。<討論 3-2>

(1)若已知 A 射 B

命中率 b	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 b	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.6	**0.584679**	0.314145	0.101176
0.1	**0.549557**	0.450443	0.000000	0.7	**0.578899**	0.421101	0.000000
0.2	0.413554	**0.586446**	0.000000	0.8	0.364544	**0.385214**	0.250243
0.3	0.433987	**0.542495**	0.023518	0.9	0.294234	**0.462490**	0.243276
0.4	**0.575293**	0.416261	0.008446	1.0	0.354586	**0.644990**	0.000424
0.5	**0.677980**	0.288720	0.033300				

(2)若已知 A 射 C

命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	0.227794	**0.386103**	**0.386103**	0.6	0.000000	**0.569269**	0.430731
0.1	0.083748	**0.465993**	0.450259	0.7	0.000000	**0.620436**	0.379564
0.2	0.025334	**0.496770**	0.477896	0.8	0.000000	**0.592948**	0.407052
0.3	0.000000	**0.508450**	0.491550	0.9	0.000000	**0.613372**	0.386628
0.4	0.000000	**0.513713**	0.486287	1.0	0.000000	**0.500000**	**0.500000**
0.5	0.000000	**0.562731**	0.437269				

(3)若已知 A 不射

對所有命中率值 *b*，B 射 C 皆為不完美最佳策略。

3.若槍手 B 不知道槍手 A, C 的命中率，但知道過去槍手 A, C 的行動，問槍手 B 不完美最佳策略。<討論 4-2>

(1)若已知 A 射 B，C 射 A:

命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	0.6	**0.83684**	0.00000	0.16316
0.1	0.37709	**0.6229**1	0.00000	0.7	**1.00000**	0.00000	0.00000
0.2	0.15723	**0.84277**	0.00000	0.8	0.47502	0.00000	**0.52498**
0.3	0.08692	**0.81721**	0.9588	0.9	0.25795	0.00000	**0.74205**
0.4	**0.95583**	0.00000	0.04417	1.0	0.00000	0.00000	**1.00000**
0.5	**0.95019**	0.00000	0.04981				

(2)若已知 A 射 B，C 射 B

命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	0.6	0.20614	**0.79386**	0.00000
0.1	0.18136	**0.81864**	0.00000	0.7	0.24143	**0.75857**	0.00000
0.2	0.45458	**0.54542**	0.00000	0.8	0.27806	**0.72194**	0.00000
0.3	0.37908	**0.62092**	0.00000	0.9	0.31909	**0.68091**	0.00000
0.4	0.25404	**0.74596**	0.00000	1.0	0.368973	**0.63103**	0.00000
0.5	0.16916	**0.83084**	0.00000				

(3)若已知 A 射 B，C 不射

命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	0.6	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.1	**0.65286**	0.34714	0.00000	0.7	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.2	**0.58285**	0.41715	0.00000	0.8	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.3	**0.56469**	0.43531	0.00000	0.9	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.4	**0.5446**	0.4554	0.00000	1.0	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.5	0.00000	**1.00000**	0.00000				

(4)若已知 A 射 C，C 射 A

命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	0.24994	0.29330	**0.45676**	0.6	0.00000	0.36978	**0.63022**
0.1	0.12255	0.17014	**0.70731**	0.7	0.00000	**0.67036**	0.32964
0.2	0.04419	0.12224	**0.83357**	0.8	0.00000	**0.71693**	0.28307
0.3	0.00149	0.05485	**0.94366**	0.9	0.00000	**0.87470**	0.12530
0.4	0.00000	0.07696	**0.92304**	1.0	0.00000	0.00000	**1.00000**
0.5	0.00000	0.19189	**0.80811**				

(5)若已知 A 射 C，C 射 B

命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	0.6	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.1	0.00000	**1.00000**	0.00000	0.7	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.2	0.00000	**1.00000**	0.00000	0.8	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.3	0.00000	**1.00000**	0.00000	0.9	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.4	0.00000	**1.00000**	0.00000	1.0	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.5	0.00000	**1.00000**	0.00000				

(6)若已知 A 射 C，C 不射

命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	**1.00000**	0.00000	0.00000	0.6	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.1	**1.00000**	0.00000	0.00000	0.7	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.2	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	0.8	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.3	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	0.9	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.4	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	1.0	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.5	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*				

(7)若已知 A 不射，C 射 A

命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	0.6	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.1	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	0.7	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.2	0.00000	**1.00000**	0.00000	0.8	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.3	0.00000	**1.00000**	0.00000	0.9	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.4	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	1.0	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*
0.5	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*				

(8)若已知 A 不射，C 射 B

命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 ***b***	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	*0.00000*	*0.00000*	*0.00000*	0.6	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.1	0.00000	**1.00000**	0.00000	0.7	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.2	0.00000	**1.00000**	0.00000	0.8	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.3	0.00000	**1.00000**	0.00000	0.9	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.4	0.00000	**1.00000**	0.00000	1.0	0.00000	**1.00000**	0.00000
0.5	0.00000	**1.00000**	0.00000				

(9)若已知 A 不射，C 不射

對所有命中率值 c，都不可能有這種策略組合。

4.若槍手 A 不知道槍手 B, C 的命中率，但知道過去槍手 B, C 的行動，問槍手 A 的不完美最佳策略。<<u>討論 4-3</u>>

(1)若已知 B 射 A，C 射 A:

命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射	命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射
0.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.6	**0.603123**	0.396877	0.000000
0.1	**0.831048**	0.168952	0.000000	0.7	**0.680335**	0.319665	0.000000
0.2	**0.844775**	0.155225	0.000000	0.8	**0.721640**	0.278360	0.000000
0.3	**0.715816**	0.284184	0.000000	0.9	**0.751754**	0.248246	0.000000
0.4	0.147814	**0.852186**	0.000000	1.0	**0.818558**	0.181442	0.000000
0.5	0.438667	**0.561333**	0.000000				

(2)若已知 B 射 A，C 射 B

命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射	命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射
0.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.6	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.1	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.7	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.2	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.8	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.3	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.9	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.4	**1.000000**	0.000000	0.000000	1.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.5	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*				

(3)若已知 B 射 A，C 不射

命中率 *a*	A 射 B	A 射 C	A 不射	命中率 *a*	A 射 B	A 射 C	A 不射
0.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.6	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.1	**0.798463**	0.201537	0.000000	0.7	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.2	**0.704777**	0.295223	0.000000	0.8	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.3	**0.770505**	0.229495	0.000000	0.9	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.4	**0.932369**	0.067631	0.000000	1.0	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.5	**1.000000**	0.000000	0.000000				

(4)若已知 B 射 C，C 射 A

命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射	命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射
0.0	0.000000	1.000000	0.000000	0.6	0.340254	**0.659746**	0.000000
0.1	0.218195	**0.781805**	0.000000	0.7	0.177783	**0.822217**	0.000000
0.2	0.215786	**0.784214**	0.000000	0.8	0.098253	**0.901747**	0.000000
0.3	0.209791	**0.759665**	0.030543	0.9	0.048428	**0.951572**	0.000000
0.4	**0.713507**	0.283879	0.002614	1.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.5	**0.603851**	0.396149	0.000000				

(5)若已知 B 射 C，C 射 B

命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射	命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射
0.0	0.287682	0.245144	**0.467174**	0.6	0.000000	0.000000	**1.000000**
0.1	0.205177	0.058192	**0.736631**	0.7	0.000000	0.000000	**1.000000**
0.2	0.201567	0.180188	**0.618244**	0.8	0.000000	0.000000	**1.000000**
0.3	0.139336	0.012671	**0.847992**	0.9	0.000000	0.000000	**1.000000**
0.4	0.000000	0.000000	**1.000000**	1.0	0.000000	0.000000	**1.000000**
0.5	0.000000	0.000000	**1.000000**				

(6)若已知 B 射 C，C 不射

命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射	命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射
0.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.6	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.1	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.7	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.2	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.8	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.3	**1.000000**	0.000000	0.000000	0.9	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.4	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	1.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*
0.5	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*				

(7)若已知 B 不射，C 射 A

命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射	命中率 ***a***	A 射 B	A 射 C	A 不射
0.0	*0.000000*	*0.000000*	*0.000000*	0.6	0.020614	**0.979385**	0.000000
0.1	0.000000	**1.000000**	0.000000	0.7	0.023190	**0.976810**	0.000000
0.2	0.000000	**1.000000**	0.000000	0.8	0.068991	**0.931009**	0.000000
0.3	0.000000	**1.000000**	0.000000	0.9	0.144036	**0.855964**	0.000000
0.4	0.003367	**0.996633**	0.003367	1.0	0.221734	**0.778266**	0.000000
0.5	0.030121	**0.969879**	0.030121				

(8)若已知 B 不射，C 射 B

對所有命中率值 c，都不可能有這種策略組合。

(9)若已知 B 不射，C 不射對所有命中率值 c，都不可能有這種策略組合。

對所有命中率值 c，都不可能有這種策略組合。

5. 若某槍手不知道其他槍手們的命中率及另外兩人的策略，問其不完美最佳策略:

(1)槍手 C

命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 *c*	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	0.184451	**0.519404**	0.315549	0.6	**0.586699**	0.446269	0.057454
0.1	0.261745	**0.506574**	0.249858	0.7	**0.577732**	0.435725	0.067561
0.2	0.370536	**0.495002**	0.161131	0.8	**0.555914**	0.420714	0.081802
0.3	**0.516463**	0.477747	0.037981	0.9	**0.547481**	0.396980	0.104250
0.4	**0.554995**	0.468745	0.035428	1.0	**0.544846**	0.354001	0.145992
0.5	**0.578144**	0.455015	0.048926				

(2)槍手 B

命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射	命中率 *b*	B 射 A	B 射 C	B 不射
0.0	0.264315	**0.735685**	0.448003	0.6	0.150948	**0.822931**	0.177314
0.1	0.244948	**0.852621**	0.590109	0.7	0.106721	**0.753474**	0.046488
0.2	0.218408	**0.834469**	0.560302	0.8	0.069532	**0.750598**	0.078608
0.3	0.202688	**0.773282**	0.465863	0.9	0.043642	**0.920274**	0.042521
0.4	0.202605	**0.794421**	0.380666	1.0	0.035821	**0.964188**	0.000043
0.5	0.198972	**0.791255**	0.255267				

(3)槍手 A

命中率 *a*	A 射 B	A 射 C	A 不射	命中率 *a*	A 射 B	A 射 C	A 不射
0.0	0.287682	0.250618	**0.467174**	0.6	0.158962	**0.467036**	0.400000
0.1	0.433493	0.185430	**0.468467**	0.7	0.188425	**0.527824**	0.300000
0.2	0.351987	0.367075	**0.410941**	0.8	0.244742	**0.565197**	0.200000
0.3	0.286374	0.310265	**0.493609**	0.9	0.327404	**0.577318**	0.100000
0.4	0.271415	0.308473	**0.537456**	1.0	0.494525	**0.499994**	0.000010
0.5	0.150405	0.395398	**0.500000**				