2010 臺灣國際科學展覽會
研究報告

微醺圓舞曲—衍生圖面積極值之探討
The Research of the Derivative Picture's Extremum

董皓文 平震傑

關鍵詞: fixed circle、extremum、derivative unit

目錄

摘要

我們從日常生活中的酒瓶填塞問題，延伸出圓在相守條件下產生的衍生圖面積極值及相守圓排法等問題，研究過程中我們發現以下的結果：

一、我們可以利用較少個相守圓的排法，以**繁殖**或**增加**的方式排出較多個相守圓的衍生圖。

二、當相守圓數量為 2 個、4 個及 6 個時，相守圓以對角線排列，且衍生圖為正方形時，面積會產生最大值。而當相守圓數量為 3 個及 5 個時，衍生圖面積最大值會出現在相守圓排成波浪形時，但其夾角並非特殊角。

三、當相守圓數量為 2 個至 6 個時，相守圓以直線排列，衍生圖面積會產生最小值。

四、透過不同層數、個數的研究得知：當相守圓的數量為 11 個或 14 個以上時，存在正三角形排法小於直線排法的情形 。而相守圓個數在 10 個以下時，直線排法面積都叫正三角形排法小。

五、我們可以用質單元分割的方式討論更多圓數時，相守圓間的排列方式，使得衍生多元間的排列變為數字間的加法排列，可以大大降低討論情形的複雜度。

六、 我們可以用密度的概念，搭配質單元分割的方式，得到不同圓數時，以不同衍生多元搭配波浪形法形成之衍生圖密度最小值。

七、我們可以算幾及柯西不等式來驗證特定類型的衍生圖面積極值，也可以列出面積函數來分析不同類型的衍生圖面積極值。

Abstract

Extending gift-wrapping problems in our daily lives, we further explore the extrema of the area of any given derivative picture as well as the possible arrangements of fixed circles. Our findings are as follows:

1. By means of reproduction and addition, we can get more complicated derivative pictures using a minimum number of fixed circles.
2. With three and five fixed circles respectively, the maximum area is obtained when, formed by the two lines connecting the centers of the three adjacent fixed circles, the angle is not a special angel such as 30°, 45°, or 60°.
3. Using methods of direct proof, combination comparison, and approximation, we can pinpoint the arrangements of fixed circles where the maximum areas of the derivative pictures can be obtained.
4. With the derived unit formed by three fixed circles, we are able to find the maximum areas of derivative pictures with a various number of fixed circles by arranging the unit in a wave shape or into a polygon.
5. The polygon arrangement is available up to an octagon. Hence, when the number of the fixed circle is larger than 25, only the wave-shape arrangement can be used to find out the maximum area of a derivative picture.
6. When arranging a large number of fixed circles into a wave shape, we find that the derivative picture approximates a rectangle whose height and width are quite different in terms of their length. Cutting it without changing the area, we can rearrange the derivative picture into a rectangle approximating a square.
7. Through the discussion of different numbers and layers, we have the following findings: when the number of the fixed circle is above 20, the equilateral triangle arrangement obtains an area smaller than the linear arrangement does; when the number is below 10, the linear arrangement forms an area smaller than that formed through the equilateral triangle arrangement; when the number is between 11and 19, however, the result is far from definite. The two arrangements may derive maximum areas with different numbers of fixed circles. This result is different from what we have thought: that the equilateral triangle arrangement may always lead to an area small than the linear arrangement does.

作者簡介

我叫平震傑，是個熱愛科學的人。從國小就開始的科展經驗中，我發現進行研究最大的意義，是在於實驗過程中的點點滴滴、和尋獲成果的喜悅！從每一次的實驗、報告、到比賽，都讓我獲益良多。這次的國際科展，除了與大家分享我們的研究外，希望也能有更多的收穫！

作者簡介

有些人熱愛在球場上奔馳，有些人沉浸於自己的音樂世界，而我則是在數學的世界中，找到了自我，看到了未來。對於這大千世界中的一切事物，我總是抱持著一顆好奇的心，樂於發現這一切有趣的現象與規則。我是董皓文，這次在這個看似簡單的題目中，又再次激發了我對數學的熱愛。

壹、　研究動機

延續先前國際科展初審的研究，我們從日常生活中的禮品包裝問題，延伸出圓在相守條件下產生的衍生圖面積極值及相守圓排法等問題，在充分的研究後，我們體驗到了數學的浩瀚無邊。然而我們發現這個題目似乎還可以用其他角度來討論，於是我們以先前的研究為基礎，開始著手進行更深入更完整的探討……

貳、　研究目的

一、 探討衍生圖的特性及面積極值。

二、 衍生圖產生面積極值時，圓與圓之間排法的關係。

三、 衍生圖在生活中的應用。

參、　研究器材

紙、筆、1 元硬幣數個、電腦、Excel、GSP、WxMaxima、Graphmatica。

肆、　名詞定義

一、 相　守：多個等圓內切於一矩形並以外切方式排列，使得這些圓不論受任何方向外力，都無法移動、轉動

二、 相守圓：滿足相守條件的圓

三、 衍生圖：符合相守條件的矩形。

四、 角　度：衍生圖中連心線段間、連心線段與水平線或與鉛直線間所形成的角度，我們以虛線標示

伍、　研究過程

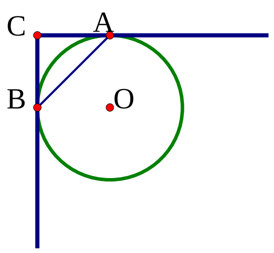
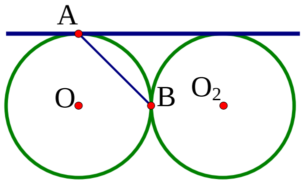
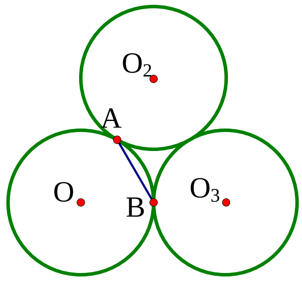
一、相守的規則：

對於平面上一單位圓 O，將其與矩形的邊或其他圓的切點找出，對於切點、切點夾弧性質做以下研究：

（一）切點的限制：

1.相鄰兩切點之距離大於 1：

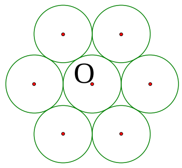
因為切點的形成只會有兩種情形：圓與圓的切點或是圓與矩形邊的切點，所以相鄰兩切點就只會有以下三種情形：

皆為圓與矩形邊的切點	一個是圓與圓的切點， 一個是圓與矩形邊的切點	皆為圓與圓的切點
		
$\overline{AB}=\sqrt{2}$	$\overline{AB}\geq\sqrt{2}$	$\overline{AB}\geq 1$

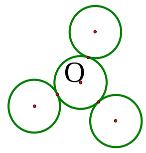
2.切點數至多六個：

∵相鄰兩切點夾弧大於 60 度

∴至多有 $\dfrac{360^\circ}{60^\circ}=6$ 個切點



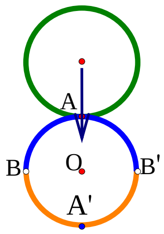
切點數最多六個



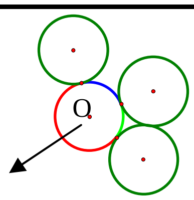
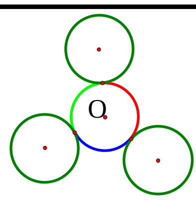
切點數最少三個

3.切點數至少三個

我們發現一個切點對一定圓會造成固定角度的無效弧，而此無效弧正是此切點對圓新的對稱點，其左右各 90 度的弧，也就是說施於此弧上的力都會被抵銷：

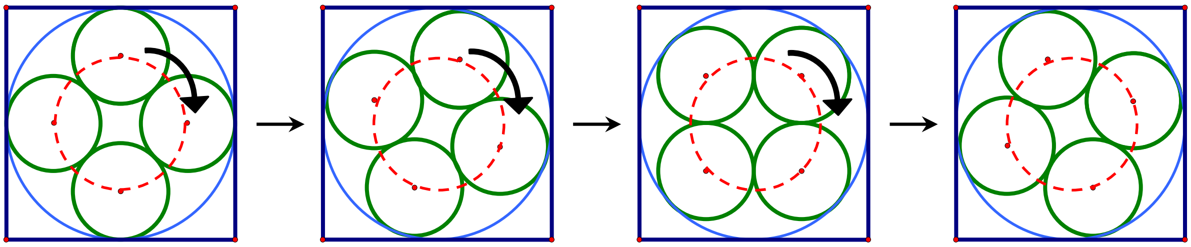
<table>
<tr><td rowspan="2">我們發現一個切點可造成其對稱點左右各 90 度的無效弧(不含端點)，也就是說施於此弧上的力都會被抵消，由於相守意義是整個圓周都要在無效弧內。
假設要符合相守的定義至少要有 n 個切點，則 $n\times\underset{x\to180^\circ}{x}\geq 360^\circ \Rightarrow n\geq 3$</td><td>藍弧：有效弧(含端點)
橘弧：無效弧(不含端點)</td></tr>
<tr><td>切點 A 對圓 O 可造成其對稱點 A'左右各 90 度之無效弧(不含端點)</td></tr>
</table>

（二）切點夾弧的限制－相鄰切點夾弧角度小於 180°：

<table>
<tr><td rowspan="2">由於無效弧是切點對稱點兩邊各 90 度的弧，而考慮相鄰的兩個切點，因為要符合相守的定義，也就是他們所夾的弧需全為無效弧，所以夾弧 $<2\times90^\circ=180^\circ$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>切點形成的弧大於或等於半圓，圓可移動。</td><td>切點形成的弧皆小於半圓，卡住了。</td></tr>
</table>

（三）對於平面上多個圓一起轉動的情形，若多個圓可內切於一大圓，且此大圓可轉動並使圓鬆散開來，便不相守了。所以有多個圓圓心共圓的情形需特別檢驗是否為多個圓可一起轉動的情形。以下是 4 心共圓的一種情形：

（四）



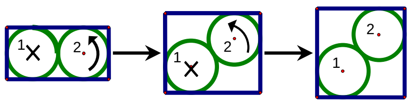
二、討論二至六個相守圓的排法與衍生圖面積大小之關係

不失其一般性，以下的討論皆令圓的半徑為 1cm。我們使用 GSP 動態模擬各相守圓之排法，藉以求得衍生圖面積極值產生時之面積、角度、長和寬。我們擷取一些圖以說明模擬之情形。

（一）探討包含兩個相守圓之衍生圖排法：

如右圖，固定 1 號圓，2 號圓轉動 0～45 度，即可表示各種排法，命之為類型 2-1。

類型 2-1

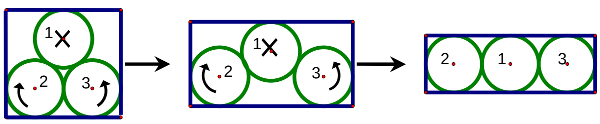


（二）探討包含三個相守圓之衍生圖排法：

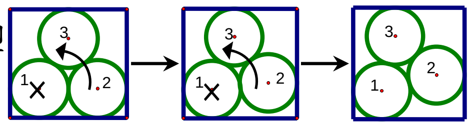
1.如下圖左，固定 1 號圓，令 2 號圓繞其旋轉，3 號圓因為要相守，所以要隨 2 號圓轉動而轉動，命之為類型 3-1。

2.如下圖右，固定 1 號圓，令 2 號圓繞其旋轉，3 號圓因為要相守，所以要和 2 號圓一起轉動，命之為類型 3-2。

類型 3-1



類型 3-2



（三）探討四個以上個相守圓之衍生圖：(討論方式皆相同，今舉五個相守圓為例說明)

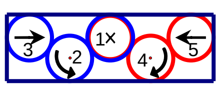
以較少個相守圓的排法繁殖、增加：

1.繁殖：

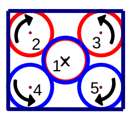
(1)將類型 3-1 複製後往右、上翻轉，重疊一個圓，得類型 5-1、5-2。

(2)將類型 3-2 複製後往上翻轉，並重疊一個圓，得類型 5-3。

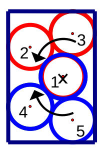
類型 5-1



類型 5-2



類型 5-3



2.增加：

(Ⅰ)在類型 4-1 左上方加入一個圓，再旋轉 180 度，得類型 5-4。

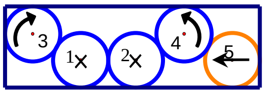
(Ⅱ)在類型 3-2 的兩側各加入一個圓，得類型 5-5。

(Ⅲ)於類型 4-4 再加入一個圓(5 號圓)，得類型 5-6。

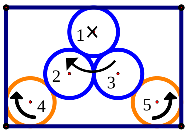
3.五邊形排法(類型 5-7)：

五個圓的排法中，有一特例無法以較少圓的排法繁殖、增加產生，命之為五邊形排法。

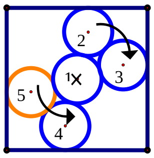
類型 5-4



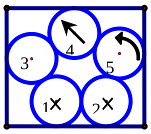
類型 5-5



類型 5-6



類型 5-7



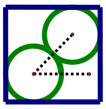
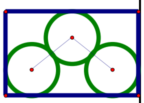
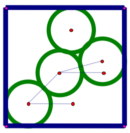
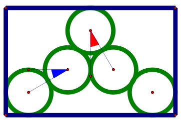
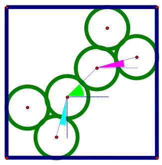
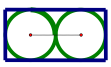
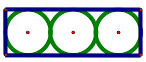
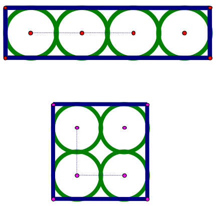
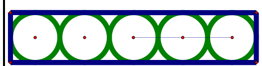
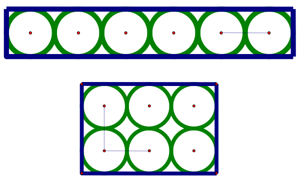
三、由上述的討論我們得到了以下的研究結果

（一）我們可用較少相守圓的排法，以繁殖或增加的方式找出較多相守圓的排法，並求其面積極值。

（二）五、六個相守圓的排法中，都有特例無法以繁殖、增加產生，我們稱之為五、六邊形排法。

（三）利用 GSP 觀察衍生圖面積極值，類型 3-1 會出現非特殊角情形，同樣情形也發生在類型 4-3、5-1、5-3、5-4、5-5、5-7、6-1、6-2、6-3、6-4、6-5、6-6、6-9。

（四）二至六個相守圓所形成之衍生圖面積極值整理見下：

相守圓個數	2	3	4	5	6
衍生圖面積最大值(cm^2)	$(2+\sqrt{2})^2$	16.65	$\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$	35.51	$(2+2\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$
對應圖形					
角度（度）	45	103.2	左角:45 右角:15	紅角:30 藍角: 36.3	紅角:15 綠角:45 藍角:15
衍生圖面積最小值(cm^2)	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00
對應圖形					

（五）當相守圓個數為 2、4 及 6 個時，以對角線方式排列，且衍生圖為正方形時面積會產生最大值。

（六）當相守圓個數為 3 及 5 個時，衍生圖面積最大值會出現在夾角為非特殊角的時候。

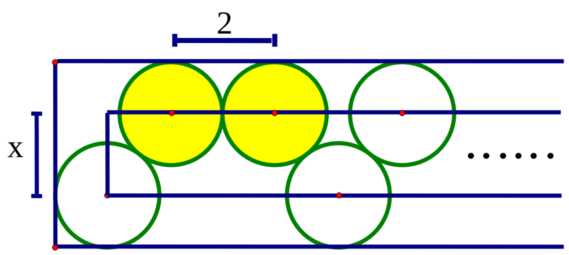
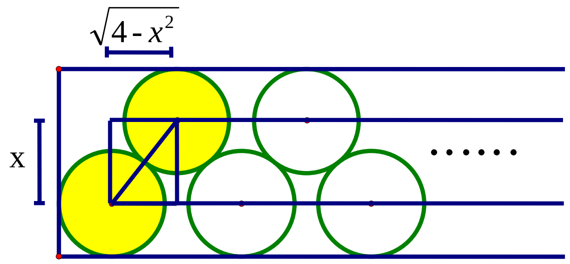
（七）當相守圓個數為 2 至 6 個時，以直線方式排列時，衍生圖面積會產生最小值。

而從二至六個相守圓衍生圖面積極值的表格中可觀察到二至六個相守圓衍生圖面積產生最大值時，3 和 5 個相守圓都是排成類似波浪的圖形，而最小值是出現在直線排法，而其實直線排法也可視為波浪形排法的極端情形，所以我們將波浪形排法單獨提出來分為衍生圖面積最大值及最小值做以下研究。

四、波浪形排法產生衍生圖面積最小值的情形

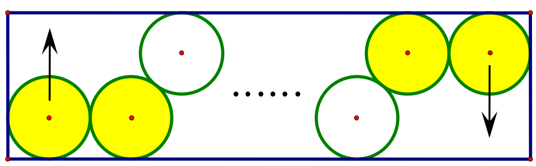
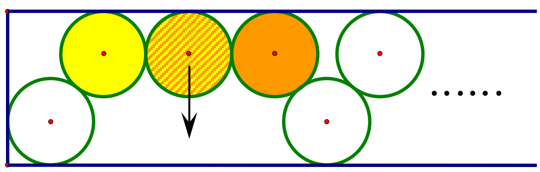
（一）首先，以下研究我們分成圓數為奇數個和偶數個來討論

（二）波浪形排法中，相鄰的兩個圓只會有兩種排列方式，分別為並排以及交錯。

並排	交錯
	

（三）假設小矩形的高為 x，衍生圖的高就是 x+2，並設這些兩兩相鄰的圓的排列情形中，交錯有 a 個，並排有 b 個，圓數 n=a+b+1。並排可使寬增加 2 公分，交錯則可使寬增加 $\sqrt{4-x^2}$ 公分，所以衍生圖面積=$(x+2)\left(a\cdot\sqrt{4-x^2}+2b+2\right)$

（四）由於最左及最右邊都要是交錯的，且兩個並排不能相鄰，所以 b≦a-2。

	
最左邊及最右邊不能是並排	兩個並排不能相鄰

（五）我們發現當 b=0 時，衍生圖面積最小，也就是全部的排列方式全為交錯

證明如下：A(x,a,b)表示衍生圖面積值

1. 圓的個數是奇數個時:

若 b_1=0，則 A(x,a_1,b_1)=$(x+2)\left(a_1 \cdot \sqrt{4-x^2}+2\right)$

若 0＜b_2≦a_2-1，則 A(x,a_2,b_2)=$(x+2)\left(a_2 \cdot \sqrt{4-x^2}+2b_2+2\right)$

∵圓數相同　∴$a_1+b_1=a_2+b_2$ ⇒ $a_1=a_2+b_2$

設 $a_2-b_2=2k+1$ ⇒ $a_1=2a_2-2k-1$

⇒ $a_2=\left(\dfrac{a_1+2k+1}{2}\right)$

∴A(x,a_2,b_2)= $(x+2)\left(a_2 \cdot \sqrt{4-x^2}+2b_2+2\right)$ = $(x+2)\cdot\left(\left(\dfrac{a_1+2k+1}{2}\right)\cdot\sqrt{4-x^2}+a_1-2k+1\right)$

⇒A(x,a_2,b_2)-A(x,a_1,b_1)=$(x+2)\cdot\left(\left(\dfrac{-a_1+2k+1}{2}\right)\cdot\sqrt{4-x^2}+a_1-2k-1\right)$

=$(x+2)\cdot\left(\left(\dfrac{-a_1+2k+1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{4-x^2}-2\right)\right)$

∵ $x>0$　∴ $x+2>0$

∵ $\sqrt{4-x^2}\leqq 2$　∴ $(\sqrt{4-x^2}-2)<0$

∵ $\dfrac{-a_1+2k+1}{2}=\dfrac{2k+1-a_2-b_2}{2}=\dfrac{2k+1-b_2-2k-1-b_2}{2}=\dfrac{-2b^2}{2}=-b^2<0$

∴A(x,a_2,b_2)-A(x,a_1,b_1)= $(x+2)\cdot\left(\left(\dfrac{-a_1+2k+1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{4-x^2}-2\right)\right)>0$

⇒ A(x,a_1,b_1)＜A(x,a_2,b_2)　QED

2. 圓的個數是偶數個時:

若 $b_3=0$，則 $A(x,a_3,b_3)=(x+2)\left(a_3\cdot\sqrt{4-x^2}+2\right)$

若 $0<b_4\leqq a_4-2$，則 $A(x,a_4,b_4)=(x+2)\left(a_4\cdot\sqrt{4-x^2}+2b_4+2\right)$

∵圓數相同　　∴$a_3+b_3=a_4+b_4$ ⇒ $a_3=a_4+b_4$

設 $a_4-b_4=2k_2$ ⇒ $a_3=2a_4-2k_2$

$$\Rightarrow a_4=\frac{a_3+2k_2}{2}$$

$$\therefore A(x,a_4,b_4)=(x+2)\left(a_4\cdot\sqrt{4-x^2}+2b_4+2\right)$$

$$=(x+2)\cdot\left(\left(\frac{a_3+2k_2}{2}\right)\cdot\sqrt{4-x^2}+a_3-2k_2+2\right)$$

$$\Rightarrow A(x,a_4,b_4)-A(x,a_3,b_3)=(x+2)\cdot\left(\left(\frac{-a_3+2k_2}{2}\right)\cdot\sqrt{4-x^2}+a_3-2k_2\right)$$

$$=(x+2)\cdot\left(\left(\frac{-a_3+2k_2}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{4-x^2}-2\right)\right)$$

$\because x>0$　　　　$\therefore x+2>0$

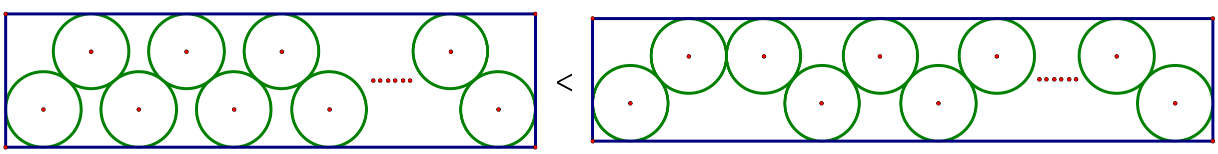
$\because \sqrt{4-x^2}\leqq 2$　　$\therefore (\sqrt{4-x^2}-2)<0$

$\because b_4>0$　　　　$\therefore \dfrac{-a_3+2k_2}{2}=a_4-a_3=-b_4<0$

$$\Rightarrow A(x,a_4,b_4)-A(x,a_3,b_3)=(x+2)\cdot\left(\left(\frac{-a_3+2k_2}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{4-x^2}-2\right)\right)>0$$

$\Rightarrow A(x,a_3,b_3)<A(x,a_4,b_4)$　　　　QED

以圖形表示，便如下圖所示，若全部圓都以交錯的方式排列，則衍生圖面積最小。



（六）衍生圖面積最小值

$\because A(x,a_1,b_1)<A(x,a_2,b_2)$、$A(x,a_3,b_3)<A(x,a_4,b_4)$

$\therefore$最小值會出現在 b=0 時，則 A(x,a,b)= $(x+2)\left(a\cdot\sqrt{4-x^2}+2\right)$

$$\Rightarrow A'(x,a)=a\cdot\sqrt{4\text{-}x^2}-\frac{ax(x+2)}{\sqrt{4\text{-}x^2}}+2$$

我們知道 $A'(x,a)$=0 時，可能產生臨界點，得到極植

$$\Rightarrow A''(x,a)=-\frac{a\cdot(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{2ax}{\sqrt{4\text{-}x^2}}+\frac{ax^2(x+2)}{\left(\sqrt{4\text{-}x^2}\right)^3}$$

$$=-\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)\cdot\left(ax+2a+2ax-\frac{ax^3+2ax^2}{4-x^2}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)\cdot\left(\frac{-2(ax^3+6ax+4a)}{4-x^2}\right)$$

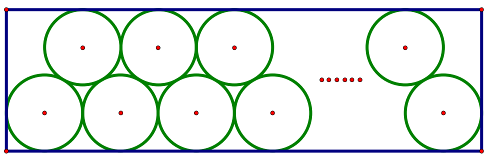
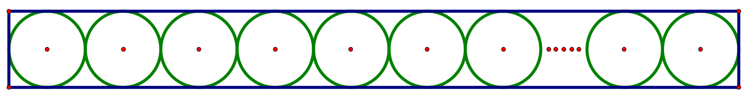
$\because a>0 \quad \sqrt{3}>x>0 \quad \therefore 4-x^2>0$

$$\therefore A''(x,a)=-\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)\cdot\left(\frac{-2(ax^3+6ax+4a)}{4-x^2}\right)>0$$

$\therefore$此臨界點為極小值　$\Rightarrow$最小值出現在端點

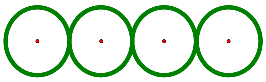
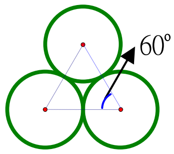
$x=\sqrt{3}\ or\ 0$

$\therefore A(x,a)=4a+4\ or\ (a+2)\left(2+\sqrt{3}\right)$

$x=\sqrt{3}$	$x=2$
	

也就是說，**最小值會發生在排成直線排法或正三角形排法時**，當 $x=\sqrt{3},b=0$ 時，便是所謂的正三角形排法，而 $x=2$ 時就是排成一直線，我們稱之為直線排法。為找出兩種排列方式在不同圓數時的比較，做了以下研究。

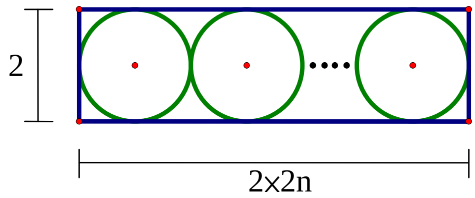
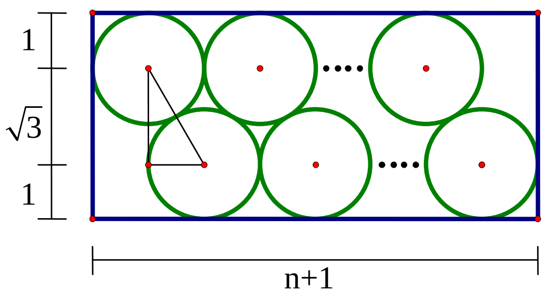
五、正三角形排法和直線排法比較

直線排法：全部的球排成一直線	正三角形排法：相鄰三顆球的圓心形成一正三角形
	

正三角形排法排成兩層及三層的情形，我們以圓的數量為變數，列出不等式使直線排法面積＜正三角形排法面積，便可得到使得正三角形排法面積＜直線排法面積時，圓數的下界。

（一）排成兩層時：

<table>
<tr>
<td rowspan="2">假設有 n 個圓，
直線排法面積＞正三角形排法面積
$\Rightarrow 2\times2n>(2+\sqrt{3})(n+1)$ $\Rightarrow 4n>(2+\sqrt{3})n+(2+\sqrt{3})$
$\Rightarrow (2-\sqrt{3})n>(2+\sqrt{3})$ $\Rightarrow n>\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\fallingdotseq 13.93$
$\because n\in N$ $\therefore n\geqq 14$
∴可知圓有 n 個(n≧14) 時
排成兩層數量相同之情形，
正三角形排法面積＜直線排法面積

因此，圓的數量為 14、16、…，可利用此情形排出正三角形排法面積＜直線排法面積。</td>
<td>直線排法：面積 $=2\times2\times2n$
</td>
</tr>
<tr>
<td>正三角形排法：面積 $=(2+\sqrt{3})(n+1)$
</td>
</tr>
</table>

由以上兩種情形可發現，圓的數量在 14 個以上排成兩層時，三角形排法面積＜直線排法面積。

（二）排成三層時：

因為需符合相守條件，所以我們分成 3k、3k-1 及 3k 來討論，但 3k-1 的情形有兩種，有直線排法和正三角形排法組合使用的情形，所以總共有四種情形須討論，以下我們一一討論：

情形一

圓有 3k-1($k\in N$)個，且上、下層比中層多一個：

假設上層有 n 個圓時，

直線排法面積＞正三角形排法面積

$\Rightarrow 2\times 2\,(3n-1) > 2n\,(2+2\sqrt{3})$

$\Rightarrow 3n-1 > (1+\sqrt{3})n$

$\Rightarrow (2-\sqrt{3})n > 1$

$\Rightarrow n > \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3} \fallingdotseq 3.73$

$\because n\in N \quad \therefore n\geqq 4$

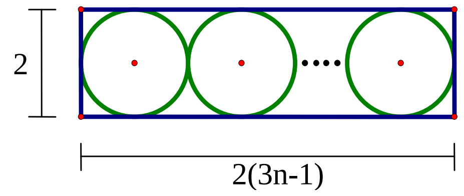
∴可知圓有(3n-1)個 (n≧4)時

排成三層且上、下層比中層多一個，

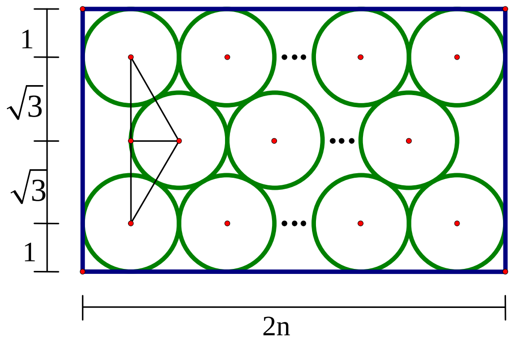
正三角形排法面積＜直線排法面積

因此，圓的數量為 11、14、17、20、23、26…，可利用此情形排出正三角形排法面積＜直線排法面積。

直線排法：面積 $=2\times 2(3n-1)$



正三角形排法：面積 $=2n\,(2+2\sqrt{3})$



情形二

圓有 3k($k\in N$)個，且三層數量相同

假設每層有 n 個圓時，

直線排法面積＞正三角形排法面積

$\Rightarrow 2\times 2\times 3n > (2n+1)\,(2+2\sqrt{3})$

$\Rightarrow 6n > (2+2\sqrt{3})n+(1+\sqrt{3})$

$\Rightarrow (4-2\sqrt{3})n > 1+\sqrt{3}$

$\Rightarrow n > \dfrac{1+\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \dfrac{5+3\sqrt{3}}{2} \fallingdotseq 5.09$

$\because n\in N \quad \therefore n\geqq 6$

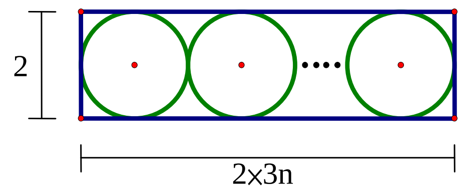
∴可知圓有 3n 個 (n≧6)時，

排成三層且三層數量相等，

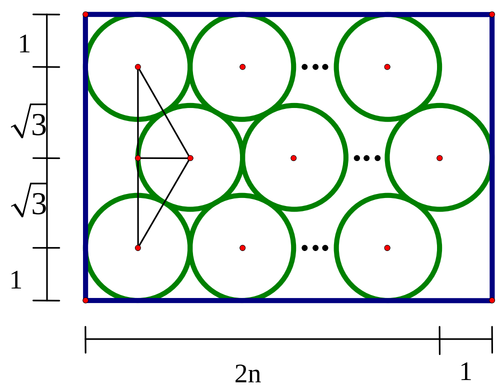
正三角形排法面積＜直線排法面積

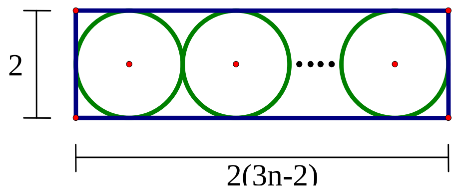
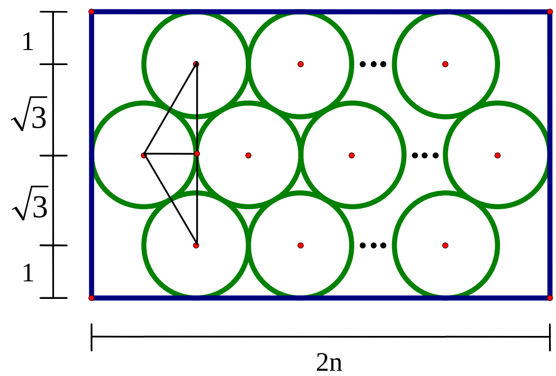
因此，圓的數量為 18、21、24…，可利用此情形排出正三角形排法面積＜直線排法面積。

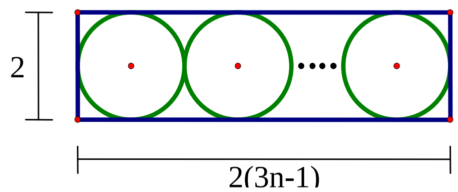
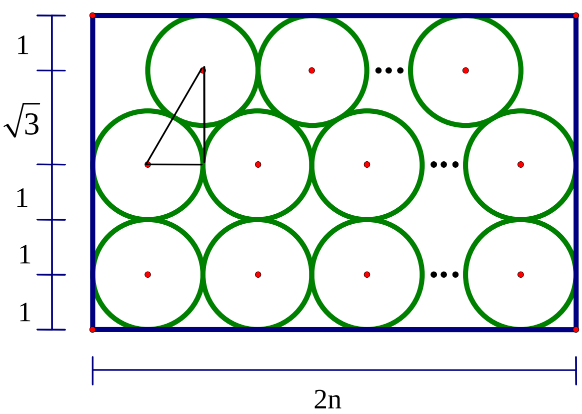
直線排法：面積 $=2\times 2\times 3n$



正三角形排法：面積 $=(2n+1)\,(2+2\sqrt{3})$



情形三	
圓有 3k-2($k \in N$)個，上、下層比中層少一個： 假設中層有 n 個圓時， 直線排法面積＞三角形排法面積 $\Rightarrow 2 \times 2(3n\text{-}2) > 2n(2+2\sqrt{3})$ $\Rightarrow 6n\text{-}4 > (2+2\sqrt{3})n$ $\Rightarrow (4\text{-}2\sqrt{3})n > 4$ $\Rightarrow n > \dfrac{4}{4-2\sqrt{3}} = 4+2\sqrt{3} \fallingdotseq 7.46$ $\because n \in N \quad \therefore n \geqq 8$ ∴可知圓有(3n-2)個 (n≧8)時 排成三層且上、下層比中層少一個， 正三角形排法面積＜直線排法面積 因此，圓的數量為 22、25…，可利用此情形排出正三角形排法面積＜直線排法面積。	直線排法：面積 =2 × 2 (3n－2)  正三角形排法：面積 =2n(2+2 $\sqrt{3}$) 

情形四：	
圓有 3k-1($k \in N$)個，中、下層比上層多一個： 假設中層有 n 個圓時， 直線排法面積＞正三角形排法面積 $\Rightarrow 2 \times 2(3n\text{-}1) > 2n(4+\sqrt{3})$ $\Rightarrow 6n\text{-}2 > (4+\sqrt{3})n$ $\Rightarrow (2\text{-}\sqrt{3})n > 2$ $\Rightarrow n > \dfrac{2}{2-\sqrt{3}} = 4+2\sqrt{3} \fallingdotseq 7.46$ $\because n > 0$ 且 $n \in N$ $\therefore n \geqq 8$ ∴可知圓有(3n-1)個 (n≧8)時 排成三層且中、下層比上層多一個， 正三角形排法面積＜直線排法面積 因此，圓的數量為 23、26、…，可利用情形四排出正三角形排法面積＜直線排法面積。	直線排法：面積 =2 × 2 (3n-1)  正三角形排法：面積 =2 n (4+ $\sqrt{3}$) 

觀察以上四種情況，可發現圓的數量為 11、14、15、16、17、18，排成三層時，三角形排法面積＜直線排法面積。我們將二或三層不同圓數不同情形有較小衍生圖面積的排法整理如下表：

相守圓個數	1~10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 以上
2 層	—	—	—	—	△	△	△	△	△	△	△
3 層(1)	—	△	—	—	△	—	—	△	—	—	△
3 層(2)	—	—	—	—	—	—	—	—	△	—	△
3 層(3)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	△
3 層(4)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	△

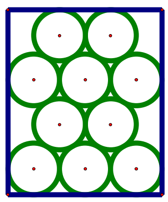
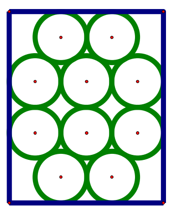
△：正三角形排法　**—**：直線排法

由以上的討論我們發現，圓的數量再 **11 或 14 個以上**時，排成兩層或三層可使三角形排法面積＜直線排法面積。所以四層以上排法的討論時，我們就只考慮相守圓的個數為 7、8、9、10、12、13 個的情形。

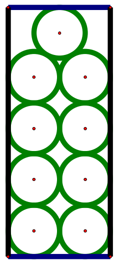
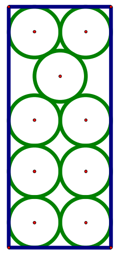
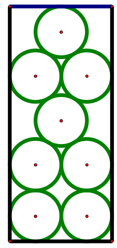
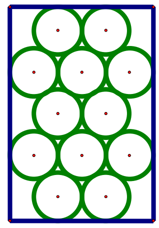
四層以上的情形我們以**高度**及**最多圓數**來討論，較不容易出現重複或面積過大的情況(如：高為 $2+3\sqrt{3}$ 的衍生圖，若將右方的四個圓刪去也是一種情況，兩種情況的相守圓與矩形間的空白面積是相等的，但刪掉四個圓後其球數較少，其面積與排成一直線面積的差一定會比球數較多的差還大，所以只討論圓數較多的情形)

且由三層的討論過程中發現有直線排法及正三角形排法混合使用的情形，所以在四至七層的討論過程中，也要同時考慮直線排法及正三角形排法混合使用的情況。

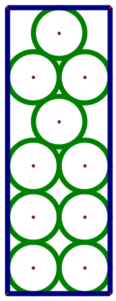
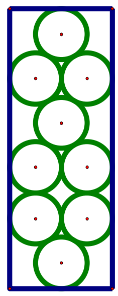
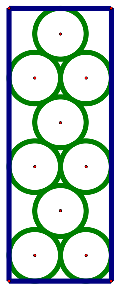
（三）排成四層時：

高	$6+\sqrt{3}$	$4+2\sqrt{3}$
衍生圖		
相守圓數量	10	10
三角形排法面積	$6(2+3\sqrt{3})\fallingdotseq 43.1$	$6(4+2\sqrt{3})\fallingdotseq 44.78$
直線排法面積	40	40

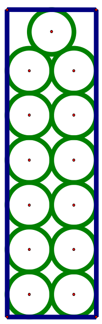
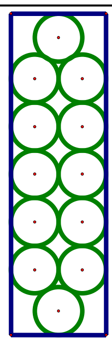
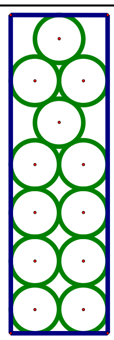
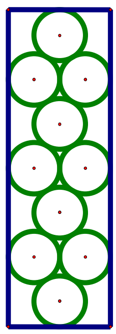
（四）排成五層時：

高	$8+\sqrt{3}$	$6+2\sqrt{3}$	$4+3\sqrt{3}$	$2+4\sqrt{3}$
衍生圖				
相守圓數量	9	9	8	12
三角形排法面積	$32+4\sqrt{3}\fallingdotseq 38.93$	$24+8\sqrt{3}\fallingdotseq 37.85$	$16+12\sqrt{3}\fallingdotseq 36.78$	$12+24\sqrt{3}\fallingdotseq 53.57$
直線排法面積	36	36	32	48

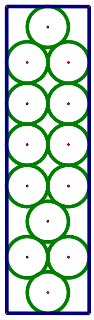
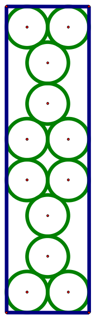
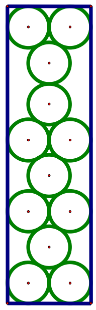
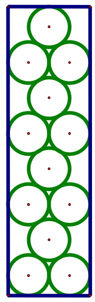
（五）排成六層時：

高	$6+3\sqrt{3}$	$4+4\sqrt{3}$	$2+5\sqrt{3}$
衍生圖			
相守圓數量	10	9	9
三角形排法面積	$4(6+3\sqrt{3})\fallingdotseq 44.78$	$4(4+4\sqrt{3})\fallingdotseq 43.71$	$4(2+5\sqrt{3})\fallingdotseq 42.64$
直線排法面積	40	36	36

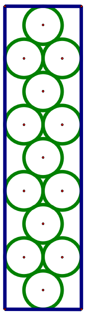
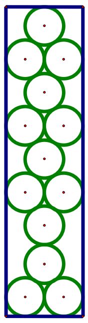
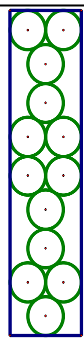
（六）排成七層時：

高	$12+\sqrt{3}$	$10+2\sqrt{3}$	$8+3\sqrt{3}$	$2+6\sqrt{3}$
衍生圖				
相守圓數量	13	12	12	10
三角形排法面積	$4(12+\sqrt{3})\fallingdotseq 54.93$	$4(10+2\sqrt{3})\fallingdotseq 53.86$	$4(8+3\sqrt{3})\fallingdotseq 52.78$	$4(2+6\sqrt{3})\fallingdotseq 49.57$
直線排法面積	52	48	48	40

（七）排成八層時：

高	$8+4\sqrt{3}$	$6+5\sqrt{3}$	$4+6\sqrt{3}$	$2+7\sqrt{3}$
衍生圖				
相守圓數量	13	12	12	12
三角形排法面積	$4(8+4\sqrt{3})\fallingdotseq 59.71$	$4(6+5\sqrt{3})\fallingdotseq 58.64$	$4(4+6\sqrt{3})\fallingdotseq 57.57$	$4(2+7\sqrt{3})\fallingdotseq 56.50$
直線排法面積	52	48	48	48

（八）排成九層時：

高	$2+8\sqrt{3}$	$4+6\sqrt{3}$	$8+4\sqrt{3}$
衍生圖			
相守圓數量	13	13	13
三角形排法面積	$4(2+8\sqrt{3})\fallingdotseq 63.43$	$4(4+6\sqrt{3})\fallingdotseq 57.57$	$4(8+4\sqrt{3})\fallingdotseq 59.71$
直線排法面積	52	52	52

由四層以上的討論，我們得知在相守圓個數為 7、8、9、10、12、13 個時，直線排法都會比較小，所以由以上二層至九層的討論可以推論得以下表格：

相守圓個數	1~10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 以上
2 層	—	—	—	—	△	△	△	△	△	△	△
3 層	—	△	—	—	△	—	—	△	△	—	△
4 層以上	—	—	—	—	×	×	×	×	×	×	×

△：正三角形排法　　—：直線排法　　×：不做討論

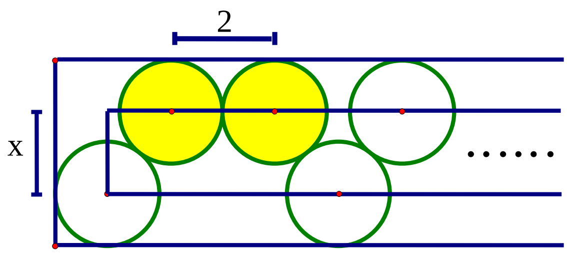
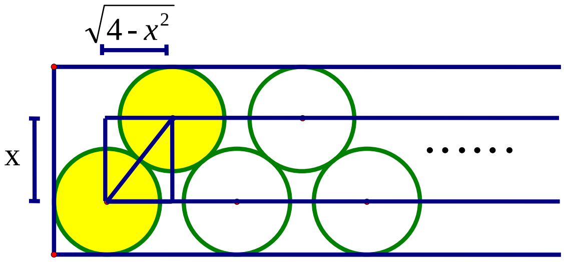
由上表得知在相守圓個數小於等於 **10** 個時，直線排法面積都會小於正三角形排法面積。而相守圓個數在 11~20 間，則是正三角形排法及直線排法的過渡區，正三角形排法會有層數的限制，只有在 11、14、17、18 個時，正三角形排法會小於直線排法面積，而在 20 個以上的情形皆可用正三角形排法排出較直線排法小的情形。

以上我們已對衍生圖面積最小值做了充分討論，那接下來延續先前「波浪形排法產生衍生圖面積最小值的情形」，我們對波浪型排法的衍生圖面積最大值做以下研究。

六、波浪形產收衍生圖面積最大值的情形

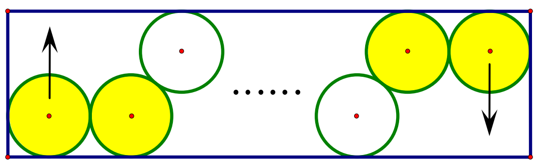
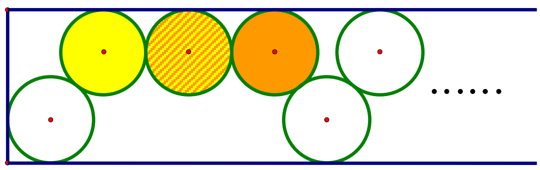
（一）我們同樣分成圓數為奇數個和偶數個來討論

（二）波浪型排法中，相鄰的兩個圓只會有兩種排列方式，分別為並排以及交錯。

並排	交錯
	

（三）假設小矩形的高為 x，衍生圖的高就是 x+2，並設這些兩兩相鄰的圓的排列情形中，交錯有 a 個，並排有 b 個，圓數 n=a+b+1。並排可使寬增加 2 公分，交錯則可使寬增加 $\sqrt{4-x^2}$ 公分，所以衍生圖面積=$(x+2)\left(a\cdot\sqrt{4-x^2}+2b+2\right)$

（四）　由於最左邊及最右邊都要是交錯的，且兩個並排不能相鄰，所以 b≦a-1。

	
最左邊及最右邊不能是並排	兩個並排不能相鄰

（五）　我們發現當 b=a-1,a-2 時，衍生圖面積最大

證明如下：A(x,a,b)表示衍生圖面積值

1. 圓的個數是偶數個時:

若 $b_1=a_1-1$，則 $A(x,a_1,b_1)=(x+2)\left(a_1\cdot\sqrt{4-x^2}+2a_1\right)=a_1\cdot(x+2)\left(\sqrt{4-x^2}+2\right)$

若 $b_2<a_2-1$，則 $A(x,a_2,b_2)=(x+2)\left(a_2\cdot\sqrt{4-x^2}+2b_2+2\right)$

∵圓數相同　∴$a_1+b_1=a_2+b_2$ ⇒ $2a_1-1=a_2+b_2$

設 $a_2-b_2=2k+1$ ⇒ $2a_1-1=2a_2-2k-1$ ⇒ $a_1=a_2-k$

$\therefore A(x,a_2,b_2)=(x+2)\left(a_2\cdot\sqrt{4-x^2}+2b_2+2\right)=(x+2)\left((a_1+k)\cdot\sqrt{4-x^2}+2a_1-2k\right)$

$$=(x+2)\left((a_1\sqrt{4-x^2}+2a_1)+k(\sqrt{4-x^2}-2)\right)$$

∵ $\sqrt{4-x^2}\leqq 2$　∴ $(\sqrt{4-x^2}-2)<0$

⇒ $A(x,a_1,b_1)>A(x,a_2,b_2)$　　QED

2. 圓的個數是奇數個時:

若 $b_3=a_3-2$，則 $A(x,a_3,b_3)=(x+2)\left(a_3\cdot\sqrt{4-x^2}+2a_3-2\right)$

若 $b_4<a_4-2$，則 $A(x,a_4,b_4)=(x+2)\left(a_4\cdot\sqrt{4-x^2}+2b_4+2\right)$

∵圓數相同　∴$a_3+b_3=a_4+b_4$ ⇒ $2a_3-2=a_4+b_4$

設 $a_4-b_4=2k_2$ ⇒ $2a_3-2=2a_4-2k_2$ ⇒ $a_3=a_4+(1-k_2)$

∴$A(x,a_4,b_4)=(x+2)\left(a_4\cdot\sqrt{4-x^2}+2b_4+2\right)$

$$=(x+2)\left((a_3+k_2-1)\cdot\sqrt{4-x^2}+2a_3-4k_2+2\right)$$

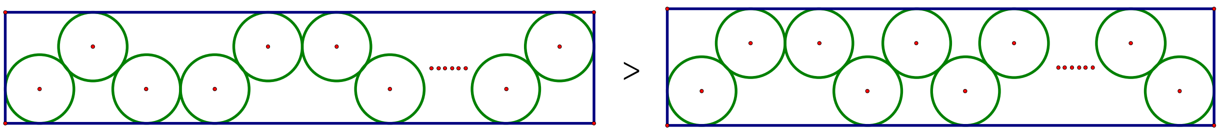
$$=(x+2)\left((a_3\sqrt{4-x^2}+2a_3)+k_2(\sqrt{4-x^2}-4)+2\right)$$

∵ $\sqrt{4-x^2}\leqq 2$　∴ $k\cdot(\sqrt{4-x^2}-4)<-2k$

∵$k>1$　∴ $k\cdot(\sqrt{4-x^2}-4)<-2k<-2$

⇒ $A(x,a_3,b_3)>A(x,a_4,b_4)$　　QED

以圖形的方式來呈現如下：



（六）　衍生圖面積最大值

1. 圓的個數是偶數個時:

∵$A(x,a_1,b_1)>A(x,a_2,b_2)$

∴最大值會出現在 $b_1=a_1-1$ 時，則 $A(x,a_1,b_1)=a_1\cdot(x+2)\left(\sqrt{4-x^2}+2\right)$

⇒ $A''(x,a_1,b_1)=-\dfrac{a_1(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}-\dfrac{2a_1x}{\sqrt{4-x^2}}-\dfrac{a_1x^2(x+2)}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}$

∵ $0<a_1$　$0<x<\sqrt{3}$

∴$A''(x,a_1,b_1)=-\dfrac{a_1(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}-\dfrac{2a_1x}{\sqrt{4-x^2}}-\dfrac{a_1x^2(x+2)}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}<0$

當 $A'(x,a_1,b_1)=0$ 時，會出現最大值

$\Rightarrow$ A'(x,a$_1$,b$_1$)= $a_1 \cdot \left(\sqrt{4 - x^2} - \dfrac{x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}} + 2 \right) = 0$

∵a$_1 \neq 0$

∴ $(4 - x^2) - x(x+2) + 2\sqrt{4 - x^2} = 0$

$\Rightarrow -(x+2)(x-2) - x(x+2) = -2\sqrt{-(x+2)(x-2)}$

$\Rightarrow (x+2)(2x-2) = 2\sqrt{-(x+2)(x-2)}$

$\Rightarrow (x+2)^2(x-1)^2 = -(x+2)(x-2)$

$\Rightarrow (x+2)(x^3 - 2x) = 0$

$\Rightarrow x(x+2)(x^2 - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (負不合)

$\Rightarrow$ A(o)= $4a_1$　　A($\sqrt{2}$) $= a_1 \cdot (2 + \sqrt{2})^2$

$\Rightarrow$ A($\sqrt{2}$)＞A(o)

∴最大值=$a_1 \cdot (2 + \sqrt{2})^2$

∵圓數 n=a$_1$+b$_1$+1=2a$_1$

∴最大值=$a_1 \cdot (2 + \sqrt{2})^2 = \dfrac{1}{2} n \cdot (2 + \sqrt{2})^2$

2. 圓的個數為奇數個時:

∵A(x,a$_3$,b$_3$)＞A(x,a$_4$,b$_4$)

∴最大值會出現在 b$_3$=a$_3$-2 時，則 A(x,a$_3$,b$_3$)= $(x+2)\left(a_3 \cdot \sqrt{4 - x^2} + 2a_3 - 2\right)$

$\Rightarrow$ A' (x,a$_3$,b$_3$)= $a_3 \cdot \sqrt{4 - x^2} + a_3 \cdot (x+2) \cdot \left(\dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \right) + 2a_3 - 2$

$\Rightarrow$ A'' (x,a$_3$,b$_3$)= $\left(\dfrac{-2a_3 x}{\sqrt{4 - x^2}} \right) + \left(\dfrac{-a_3 \cdot (x+2)}{\sqrt{4 - x^2}} \right) + \left(\dfrac{-a_3 x^2 (x+2)}{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^3} \right)$

∵0<a$_1$　$0 < x < \sqrt{3}$

$$\therefore A''(x,a_3,b_3)=\left(\frac{-2a_3x}{\sqrt{4-x^2}}\right)+\left(\frac{-a_3\cdot(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}\right)+\left(\frac{-a_3x^2(x+2)}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}\right)<0$$

$\therefore A'(x,a_3,b_3)=0$ 時會出現最大值

$$\Rightarrow a_3\cdot\sqrt{4-x^2}+2a_3-2+\left(\frac{-a_3x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}\right)=0\ 2$$

$$\Rightarrow 4a_3-a_3x^2+(2a_3-2)\sqrt{4-x^2}-a_3x^2-2a_3x=0$$

$$\Rightarrow a_3x^2+a_3x-2a_3=(a_3-1)\cdot\sqrt{4-x^2}$$

$$\Rightarrow a_3{}^2x^4+2a_3{}^2x^3-3a_3{}^2x^2-4a_3{}^2x+4a_3{}^2=(a_3{}^2-2a_3+1)(4-x^2)$$

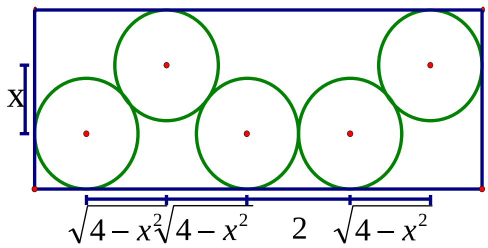
$$\Rightarrow a_3{}^2x^4+2a_3{}^2x^3-(2a_3{}^2+2a_3-1)x^2-4a_3{}^2x+(8a_3-4)=0$$

然後我們用勘根的方式找出根之所在，以下舉圓數為 5 個的情形為例:

$$\begin{cases}a_3+b_3+1=5\\ b_3=a_3-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_3=3\\ b_3=1\end{cases}\text{代入}$$

$$\Rightarrow 9x^4+18x^3-23x^2-36x+20=0$$

設 $g(x)=9x^4+18x^3-23x^2-36x+20$



$\because 0\le x\le\sqrt{3}$

代入 0、1、2 得 f(0)=20 f(1)=-12 f(2)=144

∴0~1 及 1~2 都有根

在用十分逼近法的方式逼近(將 0~1 及 1~2 各分為十等份)

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
g(X)	20	16.19	12.04	7.69	3.30	-0.94	-0.51	-8.14	-10.62	-12.00	-12
x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
g(X)	-12	-10.30	-6.55	-0.42	8.49	20.56	36.234	55.93	80.13	109.32	144

∴根會出現在 0.4~0.5 或 1.3~1.4 間

$A(x)=(x+2)\left(3\sqrt{4-x^2}+4\right)$

A(0.4)=23.70906091843111　　A(1.3)=28.24669731203495

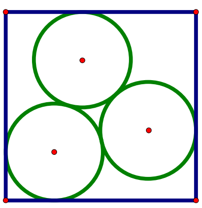
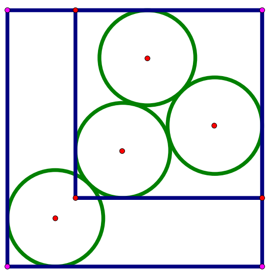
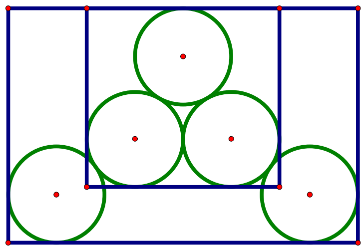
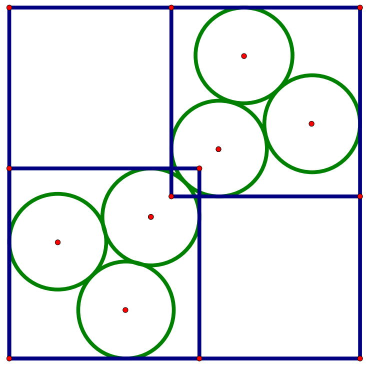
A(0.5)=24.52368754827781　　A(1.4)=28.16851399422741

∴衍生圖面積≒28.24669731203495

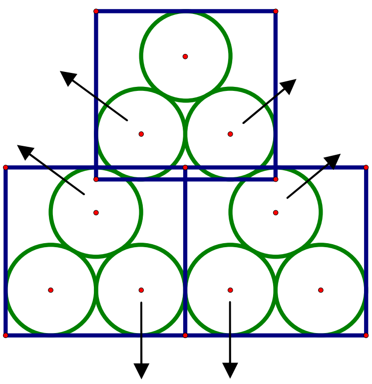
以上我們已對波浪型排法的最大值做充分研究，接下來我們要研究更多相守圓時，衍生圖面積最大值的情形。

七、衍生單元

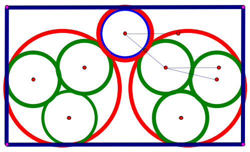
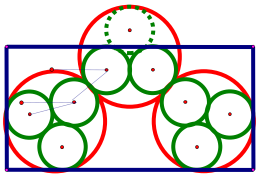
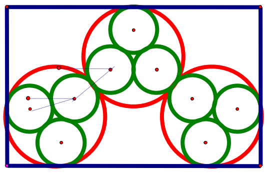
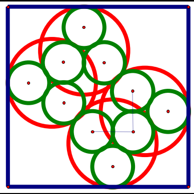
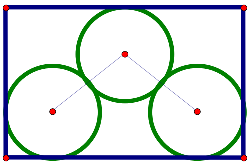
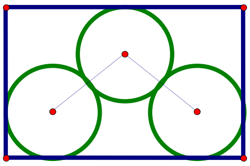
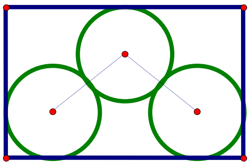
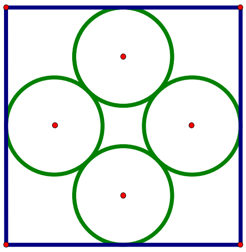
我們觀察先前研究結果後發現，除了基本的兩個圓和三個圓的情形外，四、五及六個相守圓的情形，都是由類型 3-2 的衍生圖所構成。像四個相守圓的情形中，是由類型 3-2 的衍生圖再增加一個相守圓構成的，五個相守圓的情形中，則是增加兩個，而六個相守圓的情形中，則是讓兩個類型 3-2 呈對角線排列，所以**我們定義類型 3-2 為「衍生單元」**，如此一來我們便可以**利用衍生單元作為繁殖的基本單位，並結合二至六個相守圓的各種類型圖形，以外加一個或是兩個相守圓的方式來推論衍生圖面積的最大值。**

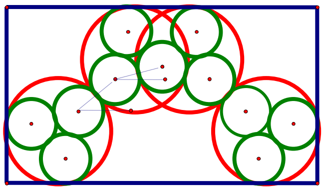
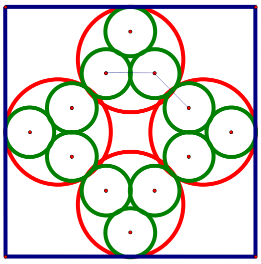
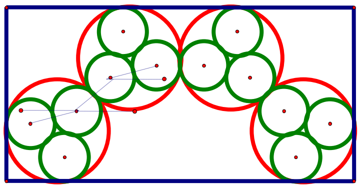
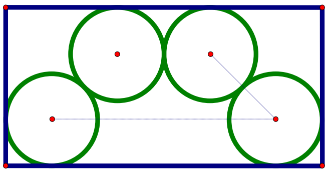
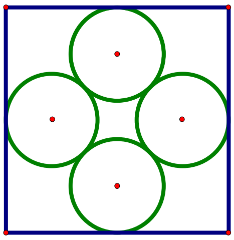
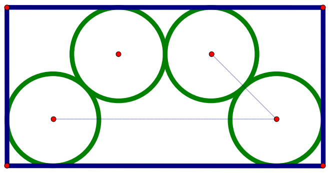
			
衍生單元	類型 3-2＋1 個相守圓	類型 3-2＋2 個相守圓	2 個類型 3-2 呈對角線排列

在使用這種方法推論七個以上的圓數時，我們發現當衍生單元排成正三角形時，會因切點所夾的角度為 180 度，產生不符合相守的條件（如右圖）。所以我們必須先將包含衍生單元排成正三角形排法的情形刪去，再將衍生單元代入其他類型圖形檢查。



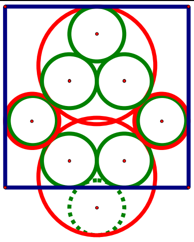
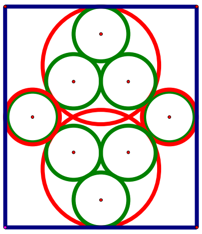
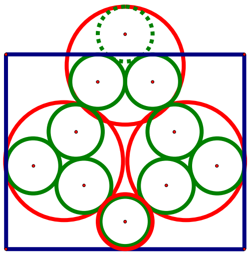
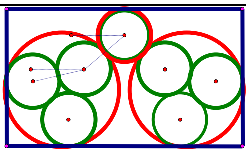
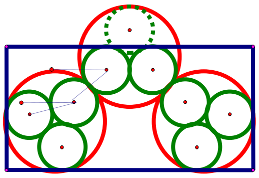
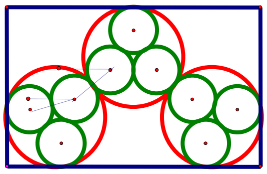
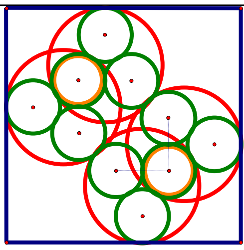
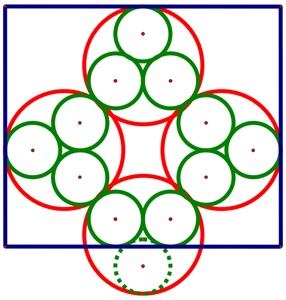
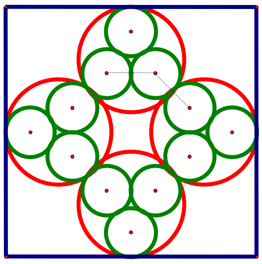
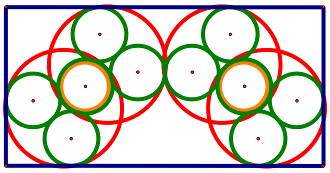
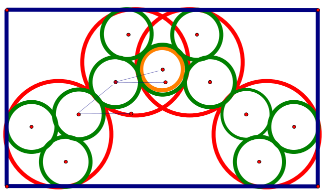
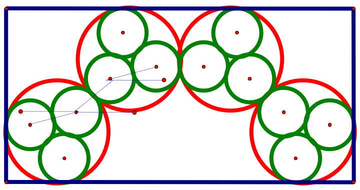
我們將衍生單元結合二至六個相守圓衍生圖各種類型圖形，並將不會相守的情形排除後，整理出七至十二個相守圓所形成衍生圖的產生方式，並實際利用 GSP 計算其面積最大值，整理如下頁：

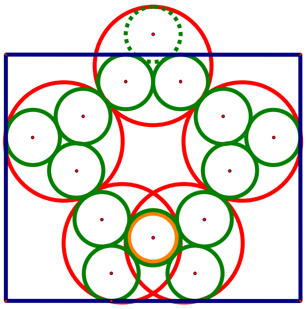
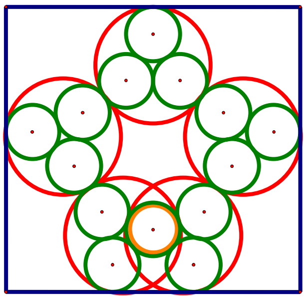
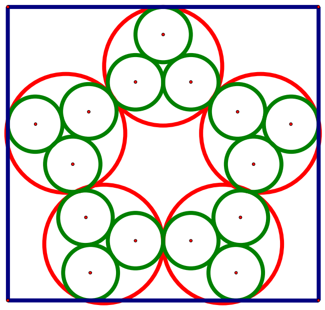
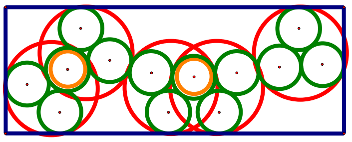
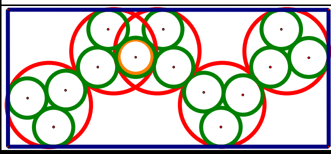
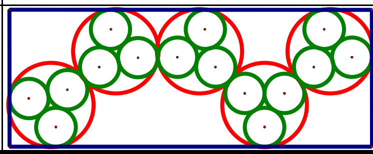
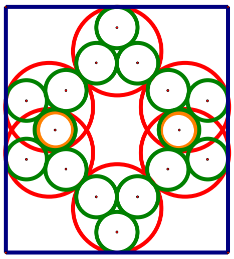
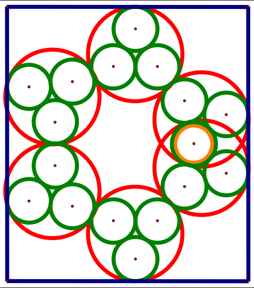
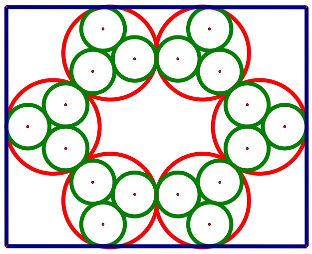
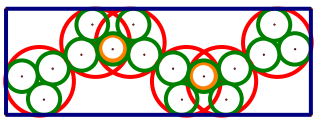
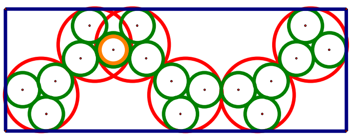
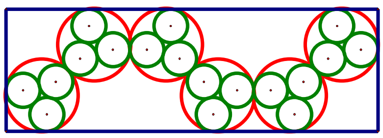
相守圓個數	7	8	9	10
衍生圖面積最大值	46.59	57.17	75.98	78.82
對應圖形				
對應類型				

相守圓個數	11	12	
衍生圖面積最大值	91.48	105.94	
對應圖形			
對應類型			

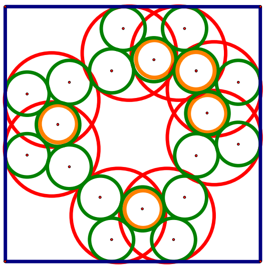
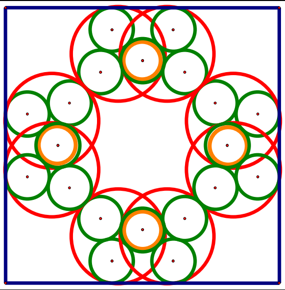
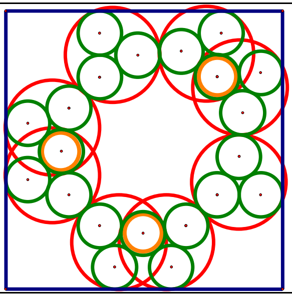
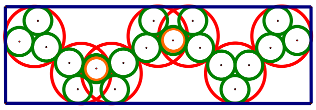
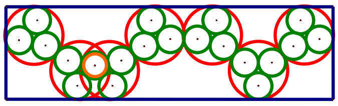
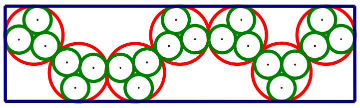
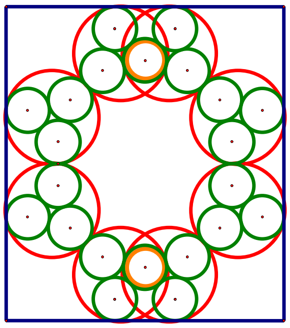
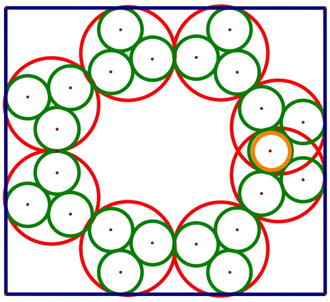
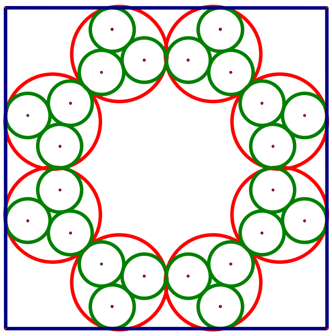
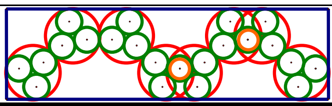
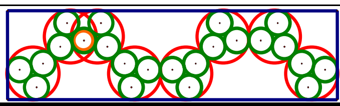
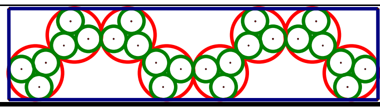
從上表中可以發現相守圓個數為 7、8、9 時，皆是以三個衍生單元排成類型 3-1 會產生衍生圖面積最大值；相守圓個數為 10、11、12 時，則是以四個衍生單元排成類型 4-1 或類型 4-4 會產生衍生圖面積最大值。**我們可以用衍生單元外加相守圓的方式得到衍生圖，也可以將衍生單元以重疊部份相守圓的方式得到衍生圖**，不過我們發現不論使用哪一種方式得到衍生圖，**面積產生最大值時，僅會出現在兩種圖形中，一種為波浪形排法**（如 7、8、9、11 個相守圓的圖形），**另一種為多邊形排法**（如 12 個相守圓的圖形）。而且我們還發現**不同排法可能得到相同的衍生圖面積最大值**。

接著我們就將衍生單元繼續代入五個及六個相守圓的所有類型中，並搭配重疊、增加相守圓的方式，整理出波浪形排法及多邊形排法所產生之衍生圖面積，如下表：

相守圓個數	7	8	9
多邊形排法衍生圖面積	44.80	56.77	62.24
對應圖形			
波浪排法衍生圖面積	46.59	57.17	75.98
對應圖形			
相守圓個數	10	11	12
多邊形排法衍生圖面積	78.82	88.28	105.94
對應圖形			
波浪排法衍生圖面積	68.77	91.48	105.94
對應圖形			

相守圓個數	13	14	15
多邊形排法衍生圖面積	**97.00**	**115.79**	120.15
對應圖形			
波浪排法衍生圖面積	92.27	114.35	**128.50**
對應圖形			
相守圓個數	16	17	18
多邊形排法衍生圖面積	**130.09**	137.74	151.96
對應圖形			
波浪排法衍生圖面積	130.06	**144.41**	**158.89**
對應圖形			

從上表可發現：衍生圖面積最大值有時出現在波浪形排法上，有時出現在多邊形排法上，而且還會出現兩種排法所產生的衍生圖面積最大值相同的情形，如果相守圓的數量更多時，是否仍會不定時出現在兩種排法上呢？甚至有相等的情形，於是我們繼續將相守圓的數量增加，討論至 24 個相守圓，整理如下頁：□

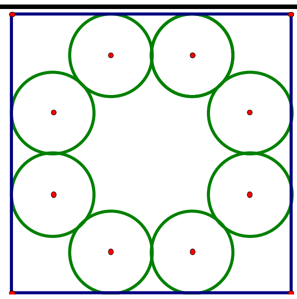
相守圓個數	19	20	21
多邊形排法衍生圖面積	136.06	157.64	159.95
對應圖形			
波浪排法衍生圖面積	**153.05**	**166.75**	**181.18**
對應圖形			
相守圓個數	22	23	24
多邊形排法衍生圖面積	**182.96**	192.61	**211.87**
對應圖形			
波浪排法衍生圖面積	**182.96**	**197.36**	**211.87**
對應圖形			

19 個到 24 個相守圓利用衍生單元以波浪形排法及多邊形排法計算其衍生圖面積最大值，由上表發現當衍生圖產生面積最大值時，均為波浪形排法，不過在 22 個及 24 個相守圓的情形中兩種排法的面積最大值是相同的，此種情形與 12 個相守圓的種況相同。

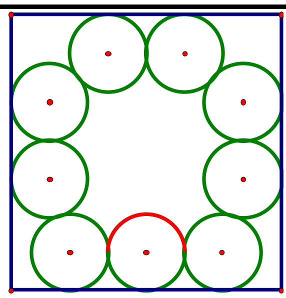
研究至此，我們發現有兩個問題非常值得探討：

（一）多邊形法是否可以一直擴充下去呢？還是有一定的限制呢？

首先，多邊形法是否可以一直擴充下去呢？以圖右為例，圖中有 8 個相守圓，此時若再加入一個圓，則會造成相鄰切點所夾的弧會成為半圓，造成此 9 個圓無法相守。因此，多邊形法最多只能使用到 8 邊形，若搭配上衍生單元，則最多可產生 24 個相守圓的多邊形排法，也就是說當相守圓個數為 25 個以上時，就只剩下波浪形排法了！



八邊形排法



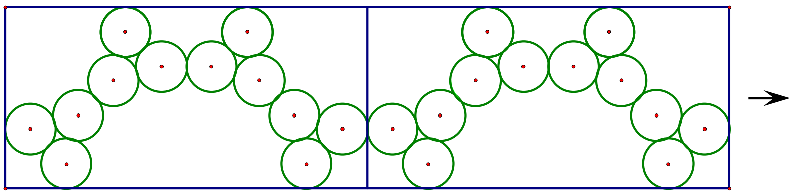
九邊形排法

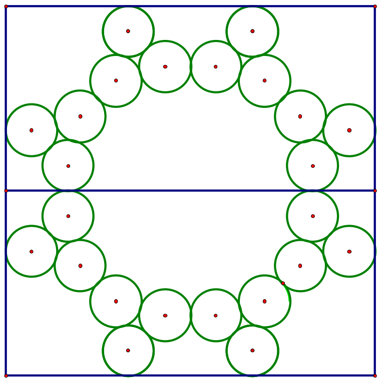
（二）兩種排法所產生衍生圖面積最大值相等，是否可以利用面積切割的方式來驗證此兩種排法所得到的圖形是相同的？要如何做呢？

我們要先將所有衍生單元視為一相守圓，得到一個只有兩層相守圓的衍生圖。然後我們發現這個兩層相守圓的衍生圖若要可以分割，會有以下兩種類型：

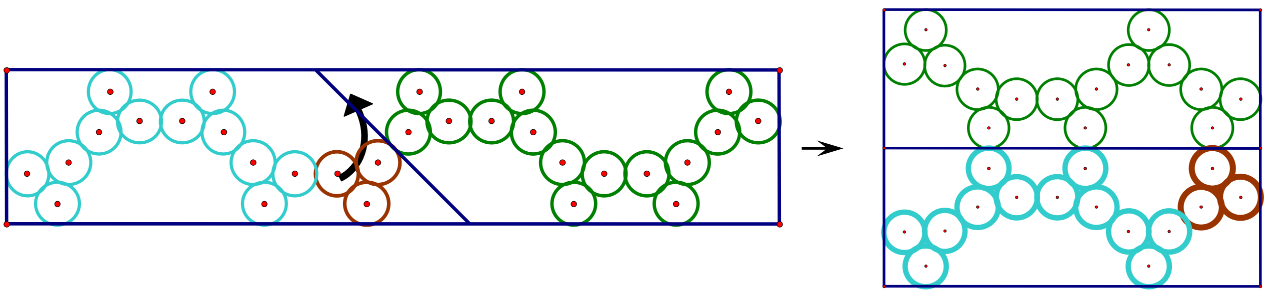
1.相守圓個數為 2n，且 n 為偶數，此種情形切割前後的面積會相同。

我們舉 24 個相守圓的情形為例





2.相守圓個數為 2n，且 n 為合數，此種情形切割前後會有所差異。



（三）結合前述兩點，當相守圓個數超過 24 個時，多邊形法已經不存在，而波浪形法從外觀上來看，會是一種長條狀的矩形，不過我們可以利用等積變換的方法將波浪形的衍生圖轉換成同樣面積大小的矩形，而且此矩形的長寬差距不會太大。

可是我們發現這種可作為單位來產生衍生圖面積最大值情形的衍生單元，不只有固定一種，且須符合一定的規則，於是我們以衍生多元的觀點對衍生圖面積最大值做以下討論。

七、衍生多元

（一）衍生多元的定義

1.其衍生圖定為五邊形，圓還是要相守。

2.最外層圓心形成兩架構曲線，使得此兩曲線以下性質：

(1) 為絕對值函數圖形

(2) 一個函數 $f'(x)$ 遞增， $f'(x)$ 恆正，且 $f'(x)>1$

令一函數 $f'(x)$ 遞減， $f'(x)$ 恆正，且 $f'(x)<1$

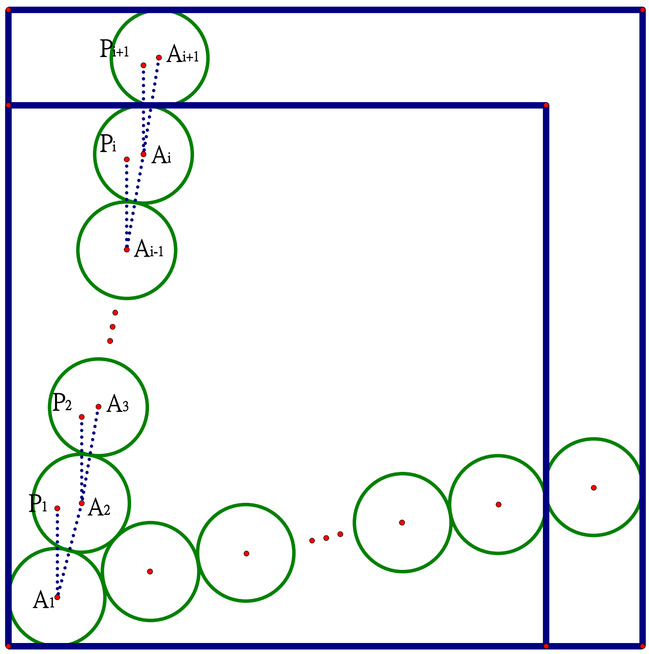
(3) 可無限延伸

(4) 全部圓心落在兩曲線間的區域

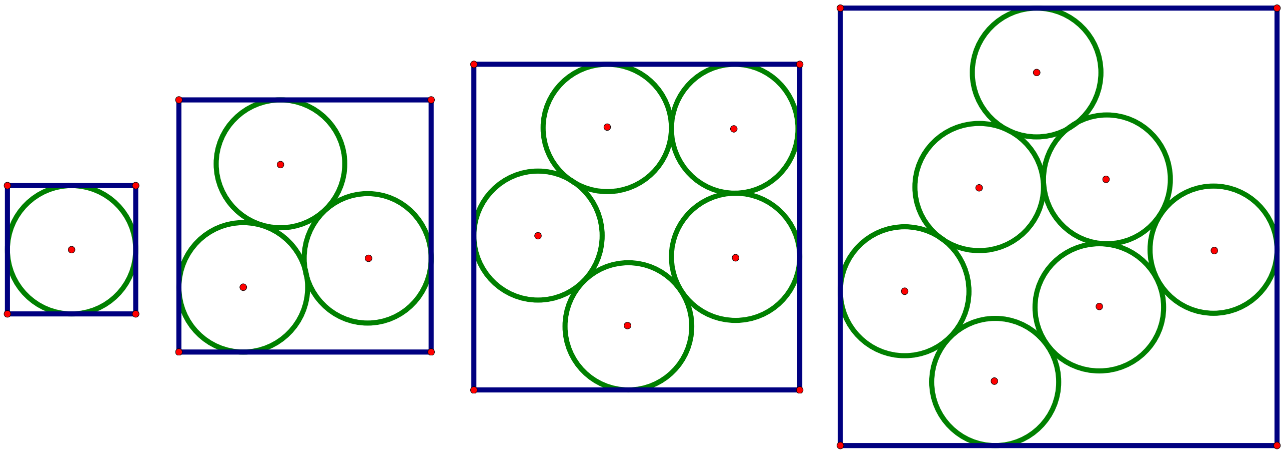
（二）衍生多元有無限多種

因為衍生多元內，每個圓皆須符合相守的條件，所以我們可由基本架構圓的無限制延伸，間接說明了為什麼衍生多元有無限多種：

對於一個衍生多元，設最外層圓心分別為 A_1、A_2、A_3、A_4…A_n，因為相守的條件(二)－相鄰切點所形成之弧要小於 180°，設第二個圓 A_2 可相守的角度範圍有 x 度，所以 $\angle P\,A_1A_2<x^\circ$。但是為了使 A_3 相守，所以 $\angle P\,A_1A_2>0^\circ$，而對於基本架構圓中之一圓 A_i，我們知道 $\angle P_iA_iA_{i+1}<P_{i-1}A_{i-1}A$，也就是說我們都能找到一圓使得 $0^\circ<\angle P_iA_iA_{i+1}<P_{i-1}A_{i-1}A_i$，也就符合相守的規則，所以衍生多元是無限多的。



（三）目前已知衍生多元



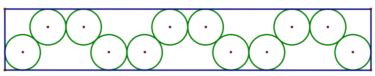
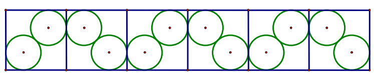
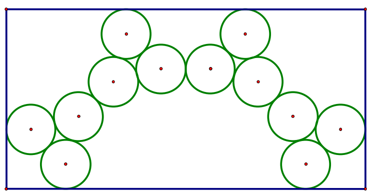
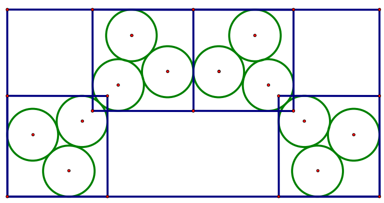
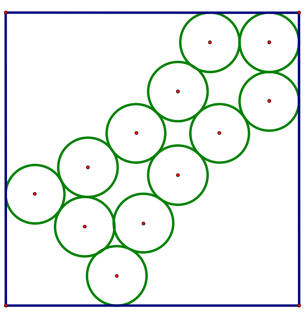
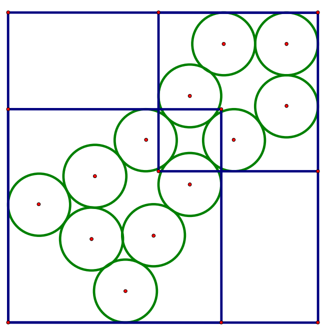
1　　3　　5　　7

（四）衍生多元的性質

衍生多元有一重要的性質便是我們可以用**衍生多元搭配波浪型排法**得到衍生圖面積極大的情形，可是不同衍生多元各有不同的限制。例如：動點的移動弧度數。

（五）質單元分割

我們都知道對於一個正整數來說，我們可以將其分解為多個質因數的乘積。那我們發現在相守圓的填塞問題中，也有類似的情形，我們可以將一個大衍生圖分割成多個衍生多元來討論，例如：

質因數分解	12	$2^2 \times 3$	12	$2^2 \times 3$
質單元分割	12	2＋2＋2＋2＋2＋2		
		3＋3＋3＋3		
		5＋7		

我們稱此種方法為質單元分割，可以將一大衍生圖分解成多個衍生單元，以數字間的加法和排列組合的方式來討論較多圓數時的情形。反過來說，我們若要求一大數量的圓形成的衍生圖，我們便可用質單元分割的方式，讓衍生圖之間的排列變為數字間的排列總和，便可迅速找到需討論的情形，且大大降低了複雜度。

以上我們以對衍生多元的性質作了多面向的完整討論，接下來我們將實際運用質單元分割的方式來求更多圓數時的衍生圖面積最大值。

八、衍生圖面積最大值的情形

衍生圖面積最大值的情形，因為面積值非常大，所以我們以密度的方式來觀察，因為固定的圓數下，衍生圖面積與密度為反比關係，所以密度是衍生圖面積的另一種表達方式。且密度的範圍不會超出 0 及 1，以下我們先闡明密度的定義，再作衍生圖面積最大值的討論：

（一）密度的定義$=\dfrac{\text{圓內總面積}}{\text{衍生圖面積}}=\dfrac{n(\text{圓數})\times\pi}{Area}$

（二）尋找特定圓數時，波浪型排法的衍生圖面積最大值

在前面的研究過程中，我們帶入了密度、波浪型排法以及衍生多元的觀念，我們發現依照這些觀念的想法，可以找出更多圓數時，波浪型排法的衍生圖面積最大值，以下我們將一一說明我們的方法及步驟：(假設我們要找的是 k 個圓的波浪型排法形成之衍生圖面積最大值)

1.找出小於 k 個相守圓所形成之所有衍生多元。

2.使用質單元分割的想法，我們可以迅速找出這些衍生多元的所有可能排列組合。

3.將這些類型一一計算其最大值，便可獲得更多圓數時，波浪型排法的衍生圖面積最大值。

（三）因為我們目前有 4 個衍生多元可做加法排列，所以在圓數 n 之內的情形，可確定波浪型排法的衍生圖面積最大值。也就是說，若我們已確定 1~n 個圓可形成的所有衍生多元，則我們可確定 n 個相守圓以內的情形已討論完整。

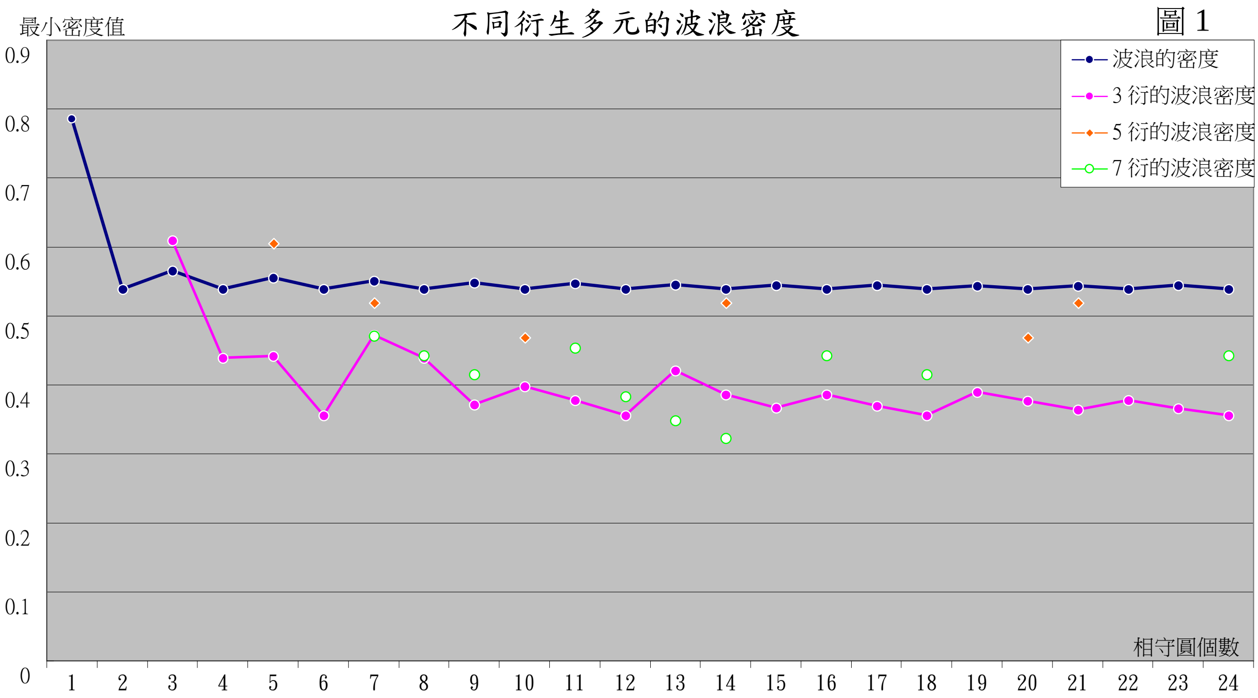
因為我們已知衍生多元是無限多種的，所以我們不可能全部找完，我們只能以有限的衍生多元來完成有限圓數之內的情形，以下會說明我們所使用的方法。

（四）由之前的研究及對波浪型排法的比較及研究，我們可確定由一三個的衍生多元來衍生的情形，加上之後發現的五及七個的衍生多元的情形，我們得到一些數據，整理如下表：

圓數	波浪的面積	3 衍的面積	5 衍的面積	7 衍的面積	波浪的密度	3 衍的密度	5 衍的密度	7 衍的密度
1	4				0.785398			
2	11.65685425				0.539012			
3	16.64845558				0.566105			
4	23.3137085	28.58			0.539012	0.43969106		
5	28.24695303	35.51	25.91645482		0.556094	0.44235323		
6	34.97056275	52.97			0.539012	0.35585342	0.6061	
7	39.87618945	46.59	42.3134545	46.64181335	0.551486	0.47201435		
8	46.627417	57.17			0.539012	0.43961415	0.51972	0.47149
9	51.51694293	75.98		67.95734722	0.548836	0.37212864		0.44303
10	58.28427125	78.82	66.92783668		0.539012	0.39857811		0.41606
11	63.1632528	91.48		76.11956032	0.547114	0.37776038	0.4694	
12	69.9411255	105.94		98.34123345	0.539012	0.35585342		0.45399
13	74.81266624	97		116.9651015	0.545906	0.42103819		0.38335
14	81.59797975	113.97		135.9282293	0.539012	0.38591118		0.34917
15	86.46398888	128.49			0.545012	0.36675142		0.32357
16	93.254834	130.06			0.539012	0.38647918		
17	98.11656949	144.41			0.544323	0.36982948		
18	104.9116882	158.9			0.539012	0.35587582		
19	109.7700228	153.05			0.543776	0.39000497		
20	116.5685425	166.75	133.8556734		0.539012	0.37680272		
21	121.3418033	181.2			0.543699	0.36409186	0.4694	
22	128.2253967	182.96			0.539012	0.37776038		
23	132.7498363	197.36			0.544307	0.36611588		
24	139.882251	211.87			0.539012	0.35587022		

其中空格的部分是因為有些衍生多元做特定形式之排列時會不相守，所以有些圓數無法排出可相守的情形。

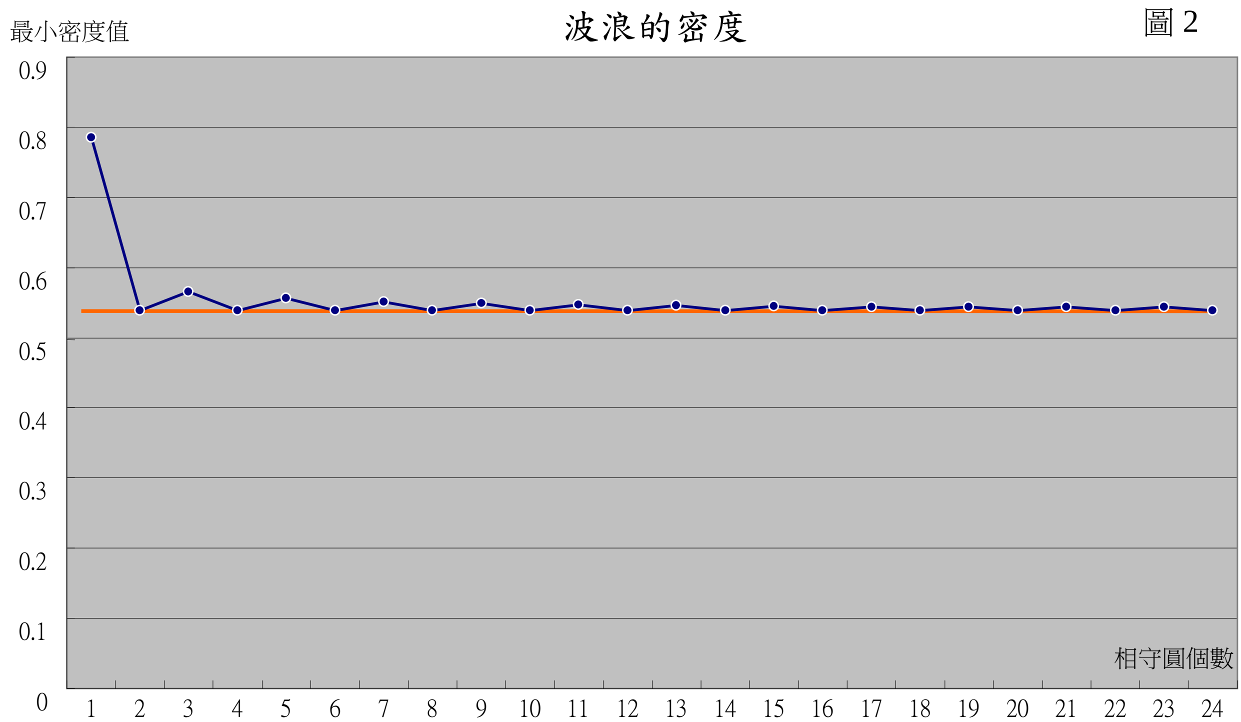
（五）我們將這些數據整理到 Excel 中，作出相守圓個數對密度最小值的折線圖，再對不同衍生多元所形成之折線圖作討論，以下是目前已知 1,3,5,7 的衍生多元形成之折線圖：



由上圖我們可以直接不同圓數時最低的點即可找出衍生圖面積最大值的情形以及衍生多元間的排列方式，但是這些折線圖似乎有特定的規律與通同處，所以我們對不同衍生多元分別做以下討論：

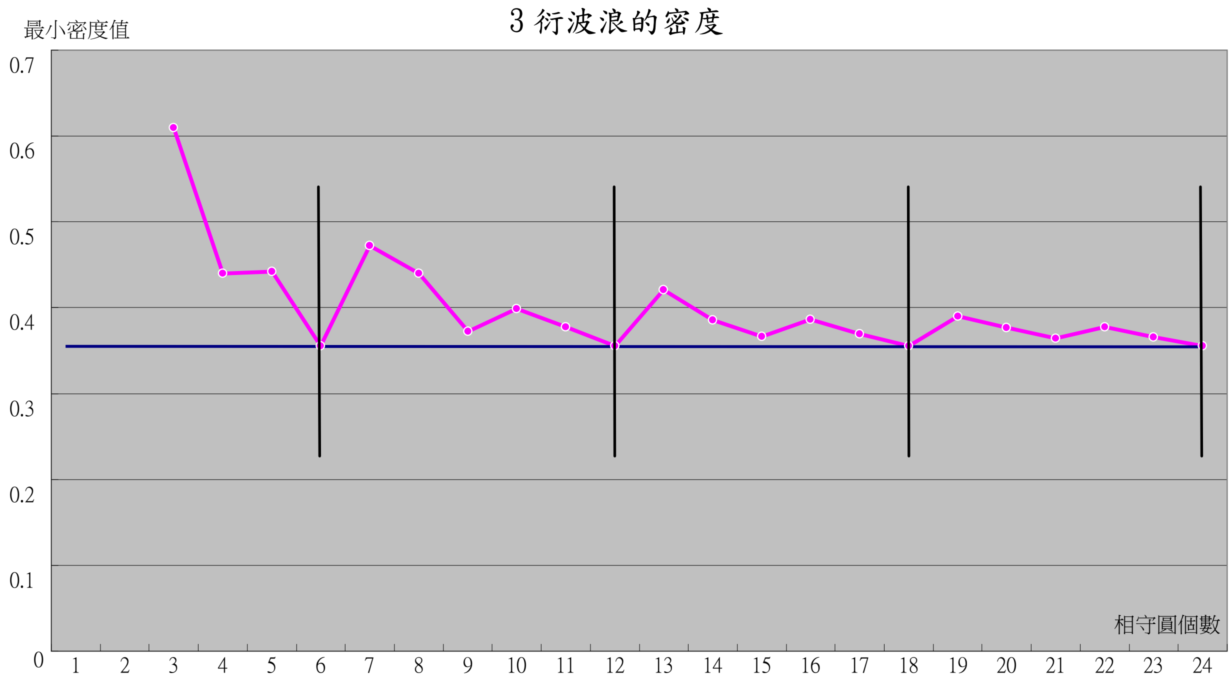
1.波浪型排法(一個的衍生多元)

由先前對波浪型排法所作的討論，將波浪型排法分為奇數個及偶數個，由於偶數個的情形，密度最小值=$\dfrac{a_1 \cdot \left(2+\sqrt{2}\right)^2}{a_1 \cdot \pi} = \dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{\pi}$ ≒53.901%，所以偶數個的點可形成一直線。而奇數個的密度雖然沒有規律，但可以確定的是，當圓個數增加時，點會趨近於偶數點形成的直線，如下圖：



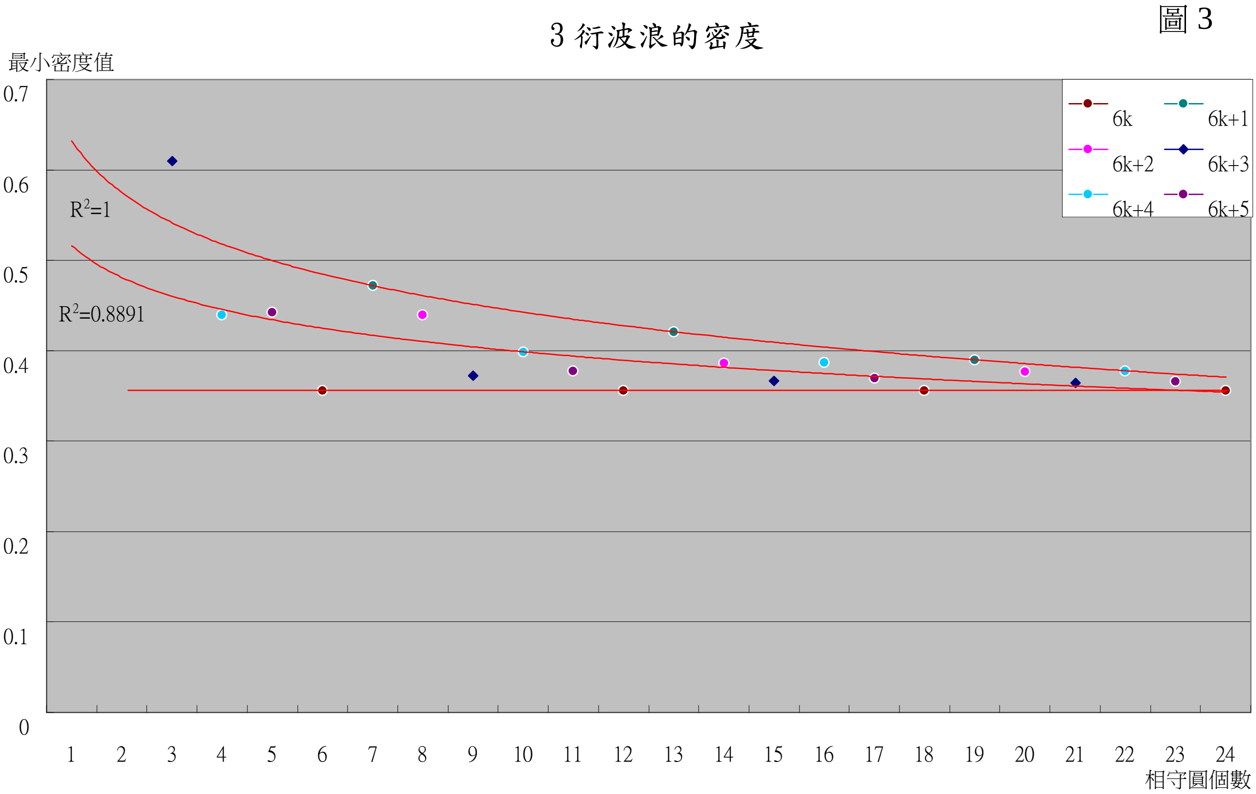
2.衍生單元波浪形排法(3 個的衍生多元)

觀察圖 1 我們發現衍生單元波浪形排法所形成的折線，是以六個六個為單位，且在這六個當中是三個三個為單位，由下圖可看出其規律性：



於是我們將依其圓數分為 6k、6k+1、6k+2、6k+3、6k+4、6k+5 六種，發現同一種的點會近似於對數函數的關係，而 6k 則是形成一直線。且當圓數增加時，每種情形的密度值都會趨向 6k 的密度值，與波浪型排法的情形非常類似。下圖是依分類做迴歸對數函數得到的圖表。

圖 3

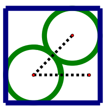
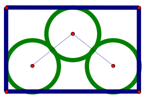
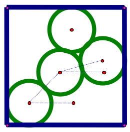
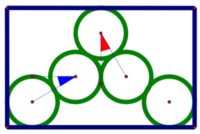
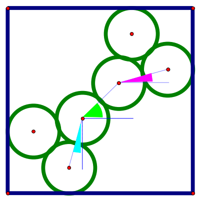
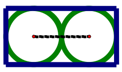
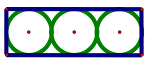
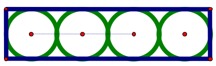
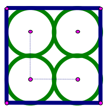
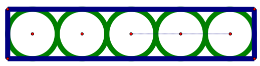
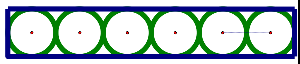
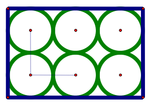


由以上觀察可知，不同圓數所形成的衍生多元，會形成固定週期的折線圖，若衍生多元有 n 個圓，則週期即為 2n，當圓數為 2n 的倍數時，就會形成密度最小值，而當圓數漸增時，因為衍生圖面積增加，所以波動會縮小，也就是說最終密度值會趨近於 2n 的密度值。

陸、　研究結果

由上述的研究我們得到了以下的研究結果

一、利用較少個相守圓的排法，可以用**繁殖**或**增加**的方式排出較多個相守圓的衍生圖，並求其面積極值。我們將二至六個相守圓的衍生圖面積極值整理如下：

相守圓個數	2	3	4	5	6
衍生圖面積最大值	11.66 $\left(2+\sqrt{2}\right)^2$	16.65	28.58 $\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$	35.51	52.97 $\left(2+2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$
對應圖形					
衍生圖面積最小值	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00
對應圖形			 		 

二、 當相守圓數量為 2 個、4 個及 6 個時，相守圓以對角線排列，且衍生圖為正方形時，面積會產生最大值。而當相守圓數量為 3 個及 5 個時，衍生圖面積最大值會出現在相守圓排成波浪形時，但其夾角並非特殊角。

三、當相守圓數量為 2 個至 6 個時，相守圓以直線排列，衍生圖面積會產生最小值。

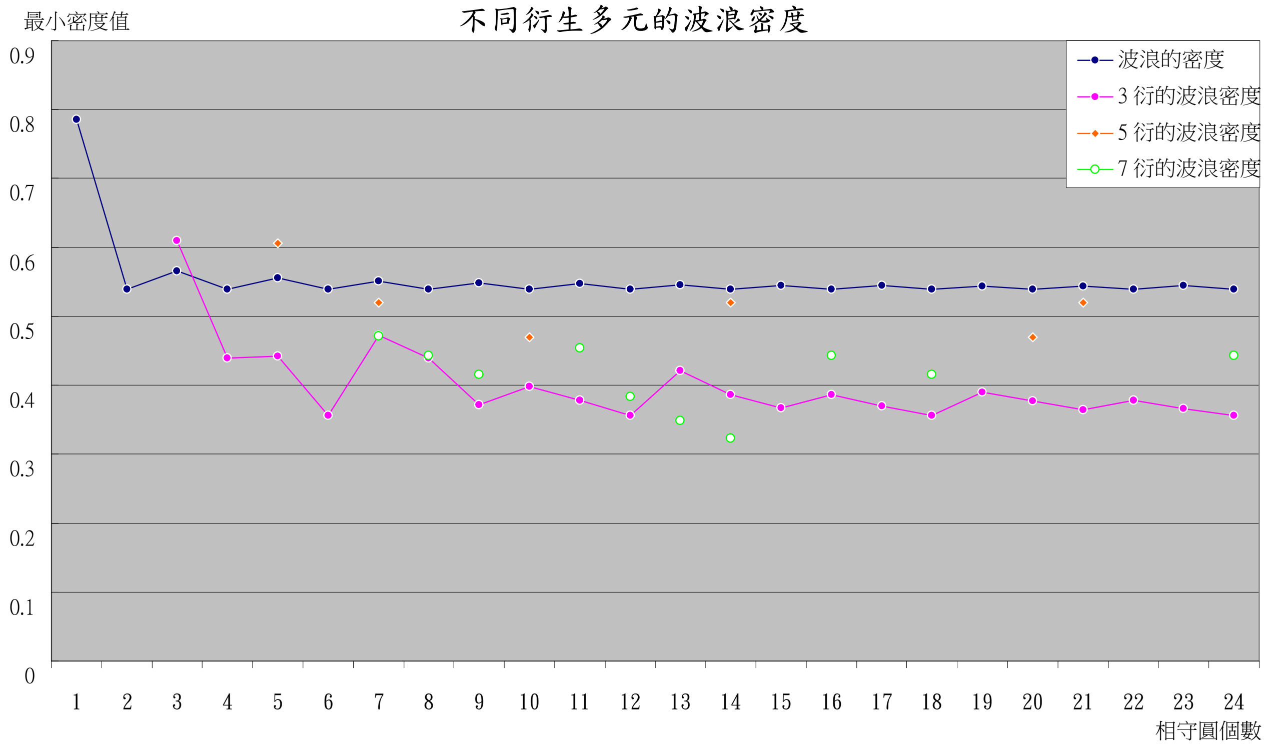
四、透過不同層數、個數的研究得知：當相守圓的數量為 11 個或 14 個以上時，存在正三角形排法小於直線排法的情形　。而相守圓個數在 10 個以下時，直線排法面積都叫正三角形排法小，我們將不同層數、個數的情形有較小衍生圖面積的排法整理如下：

相守圓個數	1~10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 以上
2 層	—	—	—	—	△	△	△	△	△	△	△
3 層	—	△	—	—	△	—	—	△	△	—	△
4 層以上	—	—	—	—	×	×	×	×	×	×	×

△：正三角形排法　　—：直線排法　　×：不做討論

五、我們可以用質單元分割的方式討論更多球數時，相守圓間的排列方式，使得圖形間的排列變為數字間的加法排列，可以大大降低討論情形的複雜度。

六、我們可以用密度的概念，搭配質單元分割的方式，得到不同圓數時，以不同衍生多元搭配波浪形法形成之衍生圖密度最小值，整理得下表：



柒、討論

我們的研究過程中，是以實驗幾何的方式，使用 GSP 動態模擬相守圓及衍生圖之情形，將衍生圖面積近似值求出來，並比較其最大值，我們想進一步面積函數的方法驗證我們的研究結果。我們先將必要的証明方法以及流程找出來，並先以手算的方式完成，再以數學軟體 WxMatica 再次檢驗我們的過程，逐一證明。於是我們做了以下討論：

一、證明

(一)兩個相守圓所形成的衍生圖面積最大值之驗證

1、過點 O_1、O_2 分別做與 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CD}$ 平行之直線，相交於 E 點。

設 $\overline{O_1E}$ = a，$\overline{O_2E}$ = b，圓半徑為 r

所求衍生圖面積=(2r+a)(2r+b)=4r²+2r(a+b)+ab

∵r^2 為定值　∴a+b、ab 同為最大值時，所求衍生圖面積最大。

2、運用算幾不等式: $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqq \sqrt{a^2b^2}$ = ab (∵a≧0，b≧0)

當 ab 有最大值時，$a^2=b^2$

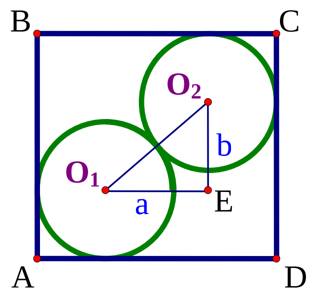
∵a≧0，b≧0　∴a=b

運用柯西不等式: $(a^2+b^2)(1^2+1^2) \geqq (a+b)^2$

當 a+b 有最大值時，a=b。

3、所求衍生圖面積有最大值時，a=b。也就是四邊形 ABCD 為正方形時，衍生圖面積最大。

此時衍生圖面積最大＝$\left(2+\sqrt{2}\right)^2$



(二)三個相守圓(類型 3-1)所形成的衍生圖面積最大值之驗證

設高為 x　　已知波浪型排法最大值會發生在

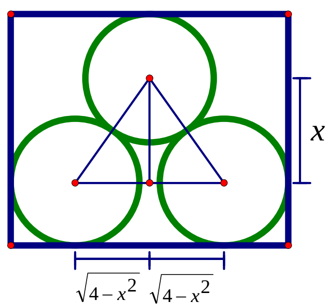
$a_3^{\,2}x^4+2a_3^{\,2}x^3-\left(2a_3^{\,2}+2a_3-1\right)x^2-4a_3^{\,2}x+\left(8a_3-4\right)=0$ 時

而此時 a=2　$\therefore 4x^4+8x^3-11x^2-16x+12=0$

設 $f(x)=4x^4+8x^3-11x^2-16x+12$

$f(0)=12$　　$f(1)=-3$　　$f(2)=64$

∴0~1 及 1~2 間有根



x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.1	10.2984	0.7	-0.8856	1.4	5.3584
0.2	8.4304	0.8	-2,1056	1.5	10.5
0.3	6.4584	0.9	-2.8536	1.6	17.2224
0.4	4.4544	1.1	-2.4056	1.7	25.7224
0.5	2.5	1.2	-0.9216	1.8	36.2064
0.6	0.6864	1.3	1.6104	1.9	48.8904

得 $x \approx 0.6or1.2$　　$A(0.6)\approx 15.12$　　$A(1.2)=16.64$　　∴衍生圖面積最大值≈16.64

(三)三個相守圓(類型 3-2)所形成的衍生圖面積最大值之驗證

1、過點 O_2、O_3 做與 $\overline{AB}$ 、平行之直線 L、M，相交於 E 點。

過點 O_1 做與 $\overline{AC}$ 、 $\overline{CD}$ 平行之直線，交 L、M 於 G、F 點。

設 $\overline{O_1F}=a$，$\overline{O_1G}=b$，圓半徑為 r

所求衍生圖面積=(a+2r)(b+2r)= $4r^2+2r(a+b)+ab$

∵r^2 為定值　∴a+b、ab 同為最大值時，所求衍生圖面積最大。

2、運用算幾不等式: $\frac{a^2+b^2}{2} \geqq \sqrt{a^2b^2} = ab$ (∵a≧0，b≧0)

當 ab 有最大值時，$a^2=b^2$

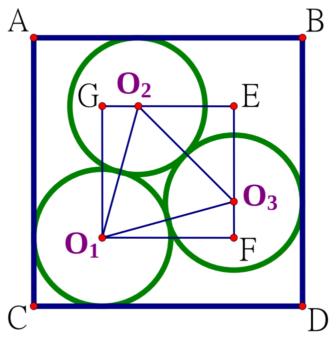
∵a≧0，b≧0　　∴a=b

運用柯西不等式: $(a^2+b^2)(1^2+1^2) \geqq (a+b)^2$

∴當 a+b 有最大值時，a=b

3、所求衍生圖面積有最大值時，a=b，也就是四邊形 ABDC 為正方形時，衍生圖面積最大。

此時衍生圖面積最大＝$\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$



由以上討論得知我們可以用絕對不等式或函數分析的方式驗證我們的研究結果，可是因為絕對不等式只是用於特定情形，所以我們對面積函數作以下討論

(三)面積函數驗證法步驟

1.波浪型排法皆可用比較的方法找出面積較大者(見過程四)

2.至於其他情形的衍生圖面積最大值驗證，我們用以下步驟：

(1) 假設最少量的變數，列出面積函數 $A(x_1,x_2\Lambda\ x_n)$

(2) 找出變數的上下界。

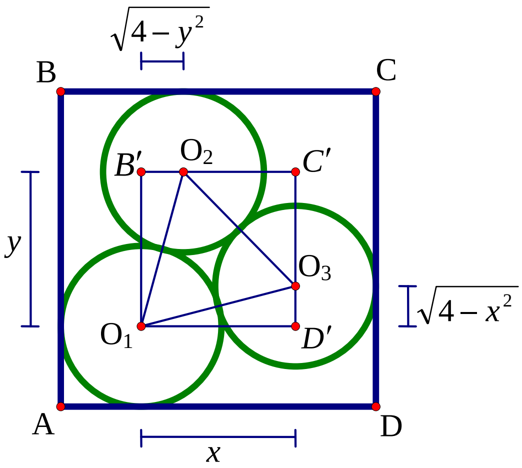
(3) 求此函數的二階導數，在變數的大小範圍內，若為正，則取端點代入原函數即可求得衍生圖面積最大值。若為負，則令此函數之一階導數為零，直接求解，或者用勘根的方式逼近根的近似值，代回原函數，即可求得衍生圖面積最大值。

3.在這些不同的情形中，我們發現為了列出正確的函數，需要用到一個重要的關係式，那便是衍生單元(類型 3-2)所形成之衍生圖的長寬關係，以下是我們求這個關係式的方式：

已知 $O_1O_2O_3$ 為一正三角形，所以 $\overline{O_1O_2}=\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_3}=2$

設 $\overline{O_1D'}=x,\overline{O_1B'}=y$，

我們要求的便是 x,y 的關係



$\because \Delta O_1O_2B,\Delta O_1O_3D$ 為直角三角形

$\therefore \overline{O_2B'}=\sqrt{4-y^2}\quad \overline{O_1D'}=\sqrt{4-x^2}$

又 $\because \Delta O_2C'O_3$ 為直角三角形

$$\therefore (x-\sqrt{4-y^2})^2+(y-\sqrt{4-x^2})^2=4$$

$$\Rightarrow x\sqrt{4-y^2}+y\sqrt{4-x^2}=2$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-x^2y^2-2=xy\sqrt{(4-y^2)(4-x^2)}$$

$$\Rightarrow 4x^4+4y^4+x^4y^4+4-8x^2-8y^2+8x^2y^2-4x^4y^2-4x^2y^4=x^2y^2(16-4x^2-4y^2+x^2y^2)$$

$$\Rightarrow x^4+y^4-x^2y^2-2x^2-2y^2+1=0$$

$$\Rightarrow \left(y^2-(\frac{x^2+2}{2})\right)^2=-x^4+2x^2-1+\frac{x^4+4x^2+4}{4}$$

$$\Rightarrow y^2-\frac{x^2+2}{2}=\pm\sqrt{-x^4+2x^2-1+\frac{x^4+4x^2+4}{4}}$$

$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{x^2+2}{2}\pm\sqrt{\frac{-3x^4+12x^2+8}{4}}}$$

$$\because y>0\quad \therefore y=\sqrt{\frac{x^2+2}{2}\pm\sqrt{\frac{-3x^4+12x^2+8}{4}}}$$

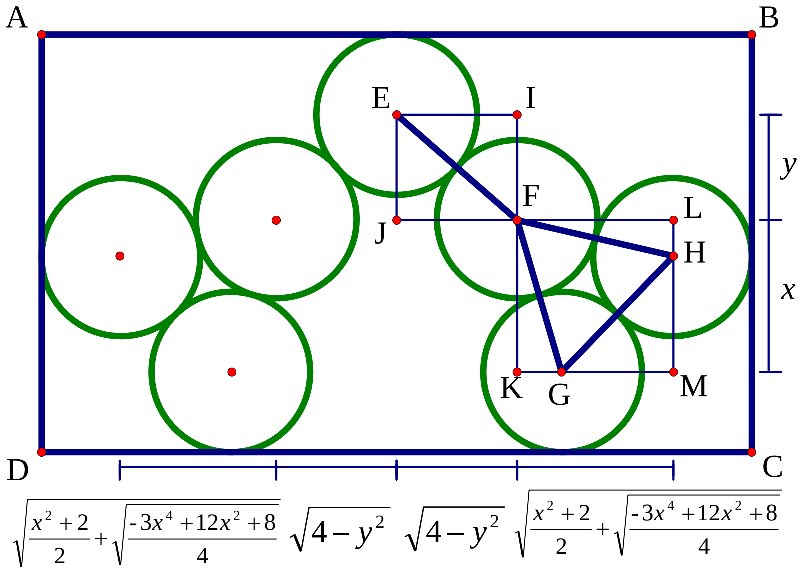
將 $x=\sqrt{3}$ 代入 $\quad y=\sqrt{\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}}=2$

$$\therefore y=\sqrt{\frac{x^2+2}{2}+\sqrt{\frac{-3x^4+12x^2+8}{4}}}$$

4.以下我們舉 7 個相守圓的一個情形為例，說明面積函數驗證法

(1)假設最少量的變數，列出面積函數 $A(x_1, x_2 \Lambda\ x_n)$：

設 $\overline{FK} = x \quad \overline{IF} = y$



$$A(x,y) = (x+y+2)\cdot\left(2\sqrt{\frac{x^2+2}{2}+\sqrt{\frac{-3x^4+12x^2+8}{4}}}+2\sqrt{4-y^2}+2\right)$$

(2)找出變數的上下界：

$0 < x < \sqrt{3} \qquad 0 < y < \sqrt{2}$

(3) 求此函數的二階導數，在變數的大小範圍內，若為正，則取端點代入原函數即可求得衍生圖面積最大值。若為負，則令此函數之一階導數為零，直接求解，或者用勘根的方式逼近根的近似值，代回原函數，即可求得衍生圖面積最大值：

$$\frac{d^2A(x,y)}{dy} = -\frac{2(x+y+2)}{\sqrt{4-y^2}} - \frac{4y}{\sqrt{4-y^2}} - \frac{2y^2(x+y+2)}{\left(\sqrt{4-y^2}\right)^3}$$

$\because 0 < x < \sqrt{3} \qquad 0 < y < \sqrt{2}$

$$\therefore \frac{d^2A(x,y)}{dy} = -\frac{2(x+y+2)}{\sqrt{4-y^2}} - \frac{4y}{\sqrt{4-y^2}} - \frac{2y^2(x+y+2)}{\left(\sqrt{4-y^2}\right)^3} < 0$$

當$\frac{dA(x,y)}{dx}=\frac{dA(x,y}{dy}=0$時

$$\frac{dA(x,y)}{dx}=2\sqrt{4-y^2}+2\sqrt{\sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{4}-x^4+2x^2-1}+\frac{x^2+2}{2}}+2$$

$$+\frac{\left(\frac{-3x^3+6x}{2\sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{4}-x^4+2x^2-1}}+x\right)\cdot(x+y+2)}{\sqrt{\sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{4}-x^4+2x^2-1}+\frac{x^2+2}{2}}}$$

$$\frac{dA(x,y)}{dy}=2\sqrt{4-y^2}-\frac{2y(x+y+2)}{\sqrt{4-y^2}}+2\sqrt{\sqrt{(x^2+2)^2-x^4+2x^2-1}+\frac{x^2+2}{2}}+2$$

解$\frac{dA(x,y)}{dx}=\frac{dA(x,y)}{dy}$

得$y=\frac{\left(x\left(-\sqrt{12x^2-3x^4}-6\right)+3x^3\right)\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{12x^2-3x^4}\cdot\sqrt{\sqrt{12x^2-3x^4}+x^2+2}}$

解$\frac{dA(x,y)}{dy}=0$

得$x=\frac{\frac{\sqrt{\sqrt{12x^2-3x^4}+x^2+2}\cdot\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{4-y^2}-2y^2-2y+4}{y}$

我們將此兩函數，運用數學繪圖軟體 GraphMatica 做出

發現他們相交於(1.9206,1.3008)及(0.05698,1.41308)

$f(1.9206,1.3008)=46.58994173936912$

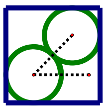
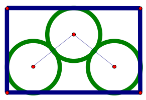
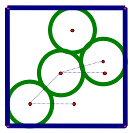
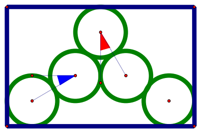
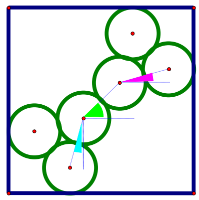
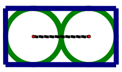
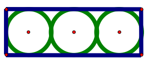
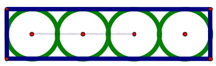
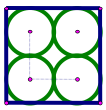
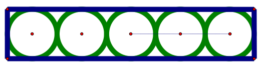
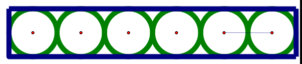
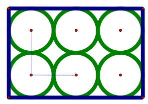
$f(0.05698,1.41308)=24.0425634826188$

將其代入原函數

得衍生圖面積最大值=46.58994073936912

捌、 研究結論

一、利用較少個相守圓的排法，可以用**繁殖**或**增加**的方式排出較多個相守圓的衍生圖，並求其面積極值。我們將二至六個相守圓的衍生圖面積極值整理如下：

相守圓個數	2	3	4	5	6
衍生圖面積最大值	11.66 $\left(2+\sqrt{2}\right)^2$	16.65	28.58 $\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$	35.51	52.97 $\left(2+2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$
對應圖形					
衍生圖面積最小值	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00
對應圖形			 		 

二、當相守圓數量為 2 個、4 個及 6 個時，相守圓以對角線排列，且衍生圖為正方形時，面積會產生最大值。而當相守圓數量為 3 個及 5 個時，衍生圖面積最大值會出現在相守圓排成波浪形時，但其夾角並非特殊角。

三、當相守圓數量為 2 個至 6 個時，相守圓以直線排列，衍生圖面積會產生最小值。

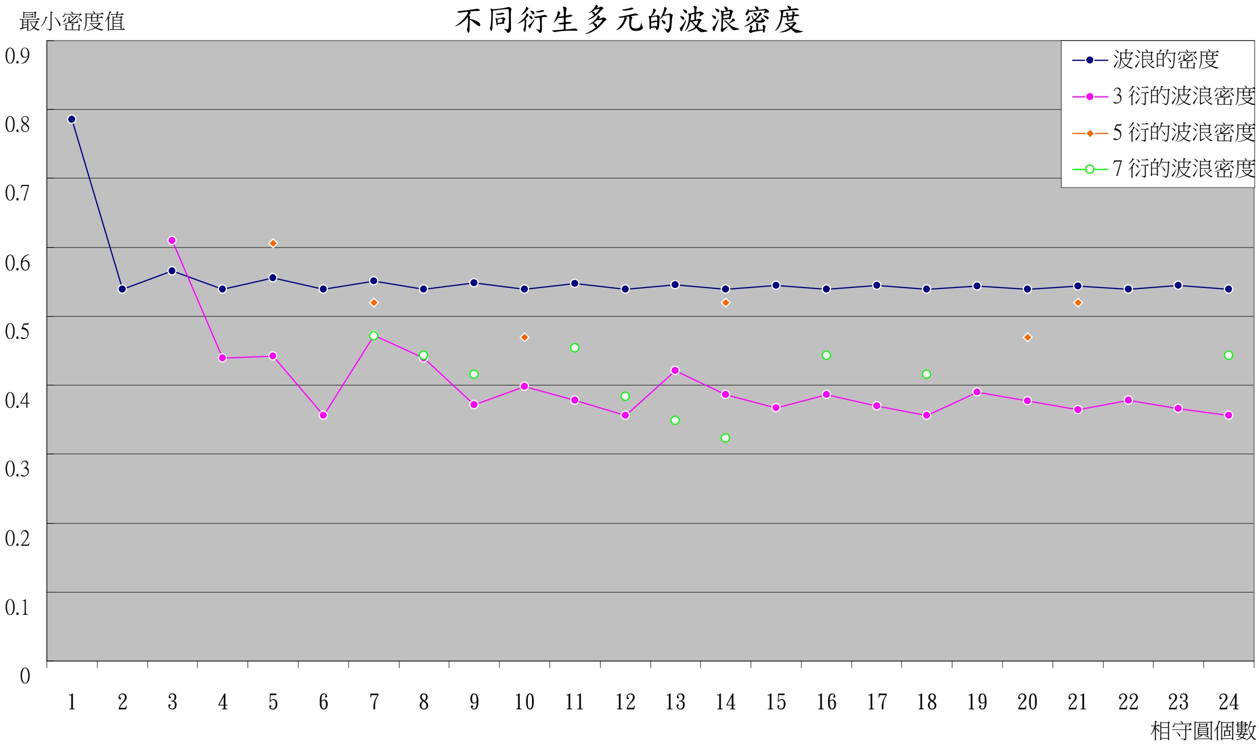
四、透過不同層數、個數的研究得知：當相守圓的數量為 11 個或 14 個以上時，存在正三角形排法小於直線排法的情形 。而相守圓個數在 10 個以下時，直線排法面積都叫正三角形排法小，我們將不同層數、個數的情形有較小衍生圖面積的排法整理如下：

相守圓個數	1~10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 以上
2 層	—	—	—	—	△	△	△	△	△	△	△
3 層	—	△	—	—	△	—	—	△	△	—	△
4 層以上	—	—	—	—	×	×	×	×	×	×	×

△：正三角形排法　—：直線排法　×：不做討論

五、我們可以用質單元分割的方式討論更多圓數時，相守圓間的排列方式，使得衍生多元間的排列變為數字間的加法排列，可以大大降低討論情形的複雜度。

六、我們可以用密度的概念，搭配質單元分割的方式，得到不同圓數時，以不同衍生多元搭配波浪形法形成之衍生圖密度最小值，整理得下表：



七、我們可以算幾及柯西不等式來驗證特定類型的衍生圖面積極值，也可以列出面積函數來分析不同類型的衍生圖面積極值。

玖、 衍生圖極值問題之應用

一、我們想在矩形的窗戶上做圓形裝飾，希望圓形裝飾不易滑動，又希望通風量最大；可以使用前述各類型排法中，衍生圖面積最大值的情形來設計；因為相守圓個數相同時，衍生圖面積越大，孔隙越大，通風量就越大。

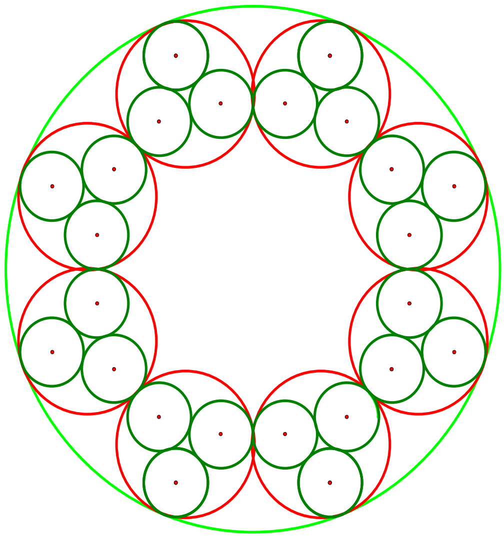
二、濾芯的滲水量大小，與濾芯中介質的排列方式有關。若濾芯剖面圖如衍生圖一般，我們希望出水量最大，可使用前述各類型排法中，衍生圖面積最大值的情形來設計。

三、包裝禮物時，我們想讓圓形物品排列緊密，又要讓外型看起來較大時，可使用前述各類型排法中，衍生圖面積最大值的情形來設計。

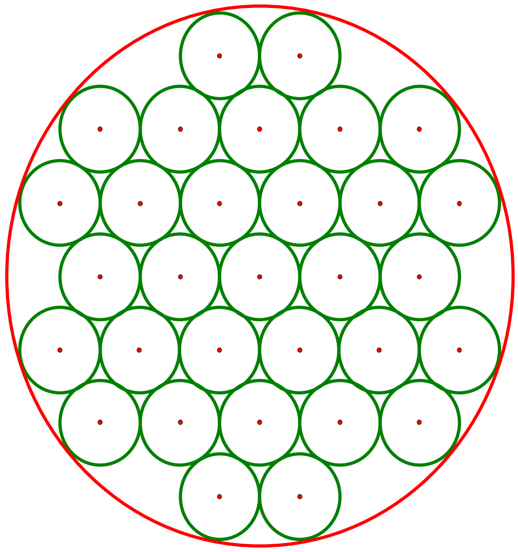
四、做水土保持工程時，土壤的滲水量的大小，是我們所關心的問題；若要使得土壤中的砂石排列的孔隙較小，我們可使用前述各類型排法中，衍生圖面積最小值的情形來設計。因為相守圓個數相同時，衍生圖面積越小，孔隙越小，越能達到保水的效能。

五、運送圓形物體時，想讓物品固定不移動，又不想佔太大空間時，可使用前述各類型排法中，衍生圖面積最小值的情形來設計。

六、在光纖之間的排列，若要使光纖間能最密集卻又不會移動，可使用前述各類型排法中，衍生圖面積最小值的情形來設計。



濾芯剖面圖



光纖的排列

拾、未來展望

一、當相守圓的數量漸漸增加時，能找出衍生圖中相守圓排列方式分類的依據。

二、相守圓的半徑不完全相同時，衍生圖面積極值的變化情形。

三、衍生圖為其他多邊形時，衍生圖面積極值的變化情形。

四、在三維空間中，衍生體的特性與體積極值。

五、證明波浪形排法可包含所有情形或找出更好的分類方式並證明其包含所有類型。

六、找出製作衍生多元的方法並證明等積變換後，衍生圖內不同空隙的關係(如下圖)。

七、當圓的半徑不同或衍生圖並非矩形時，衍生圖面積極值及排法關係。

八、六、在三維空間中，衍生體的特性與體積極值。

拾壹、參考資料

一、 刻卜勒的猜想。史皮婁。2005。天下文化。

二、 達文西的鏡子和生不完的兔子。伊凡莫斯科(Ivan Moscovich)。2006。先覺文化。

三、 wolfram math world：http://mathworld.wolfram.com/topics/PackingProblems.html

四、 Erich’s Packing Center：http://www.stetson.edu/~efriedma/packing.html